Müller-Breslau,
профессоръ политехникума въ Берлинѣ.

Выпускъ I.

Графическая статика сооруженій.

Переводъ съ послѣдняго нѣмецкаго изданія.

Г. Г. Кривошеинъ,
Военный инженеръ, преподаватель Николаевской Инженерной Академіи и Училища.

П. Н. Казинъ,
Военный инженеръ.

Томъ I.

СОДЕРЖАНІЕ выпуска I:

Изданіе инженера П. Н. Казина.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельдъ, Малая Морская, № 9.
1899.

Müller-Breslau,
профессоръ политехникума въ Берлинѣ.

Выпускъ I.

Графическая статика сооруженій.

Переводъ съ нѣмецкаго.

Г. Г. Кривошеинъ,
Военный инженеръ, преподаватель Николаевской Инженерной Академіи и Училища.

П. Н. Казинъ,
Военный инженеръ.

Томъ I.

Изданіе инженера П. Н. Казина.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. А. Мансфельдъ, Малая Морская, 9.
1898.

Дозволено цензурою, С.-Петербургъ, 10 Декабря 1898 года.

Предисловіе къ I тому.

Второе изданіе моей *„Графической статики сооруженій“*, не имѣющее почти ничего общаго съ первымъ краткимъ изданіемъ, появится въ трехъ томахъ, изъ которыхъ каждый представитъ изъ себя одно цѣлое.

Въ первомъ томѣ выводятся важные законы о многоугольникѣ силъ и веревочномъ многоугольникѣ, затѣмъ въ отдѣлахъ II и III (Выпускъ I) изслѣдуются моменты инерціи и центробѣжные моменты плоскихъ сѣченій и напряженія въ прямолинейныхъ стержняхъ. Вмѣсто эллипса напряженій введена вспомогательная окружность (указано впервые Кульманомъ). Моменты втораго порядка поперечныхъ сѣченій относительно осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести, между которыми существуетъ зависимость, подобная зависимости между нормальными и перерѣзывающими напряженіями, опредѣляются также при помощи вспомогательной окружности. Эллипсъ инерціи, имѣющій менѣе важное значеніе, изслѣдуется во второй очереди.

Отдѣлы IV до XII (выпуски II—V) содержатъ теорію статически опредѣлимыхъ плоскихъ фермъ; изслѣдованія деформаціи этихъ фермъ будутъ помѣщены во второмъ томѣ.

Послѣ краткаго введенія въ этихъ отдѣлахъ даются общія понятія о линіяхъ вліянія, затѣмъ опредѣляются опорныя сопротивленія, моменты и перерѣзывающія силы для простой балки, для фермы Гербера (консольной) и для трехшарнирной арки; въ отдѣлѣ VIII (выпускъ III) приводится общая теорія статически опредѣлимой плоской рѣшетки. При составленіи этого важнаго отдѣла я пользовался кромѣ извѣстныхъ сочиненій Ritter'а, Culmann'а, Maxwell'я, Cremona и Föppl также новыми работами Saviotti и Henneberg'а; затѣмъ, въ этомъ сочиненіи разбирается новый пріемъ *),

---

*) Краткое сообщеніе объ этомъ способѣ было сдѣлано авторомъ еще въ 1887 г. (Schweizerische Bauzeitung, стр. 121). Первое примѣненіе кинематики къ

опирающійся на простые законы ученія о геометрическомъ движеніи (кинематики), пріемъ, который даетъ возможность опредѣлить каждую изъ неизвѣстныхъ съ помощью *одного* уравненія моментовъ (законъ возможныхъ перемѣщеній); а это уравненіе позволяетъ изслѣдовать дѣйствіе каждаго груза совершенно отдѣльно, что приводитъ сейчасъ же къ важнымъ линіямъ вліянія. Различные примѣры объясняютъ примѣненіе общихъ законовъ.

Послѣдніе отдѣлы (выпускъ V) содержатъ въ себѣ подробное изслѣдованіе употребительныхъ статически опредѣлимыхъ фермъ, а именно простыхъ и консольныхъ рѣшетчатыхъ фермъ (Гербера), трехшарнирной рѣшетчатой арки и статически опредѣлимыхъ висячихъ мостовъ; кромѣ того въ этихъ отдѣлахъ изслѣдованы такія фермы, которыя, хотя до сихъ поръ и не были исполнены, тѣмъ не менѣе заслуживаютъ вниманія, такъ какъ изслѣдованіе этихъ фермъ весьма поучительно. Къ нимъ относятся балки Гербера съ воображаемыми шарнирами (Föppl) и съ произвольнымъ очертаніемъ поясовъ (§ 46—Выпускъ V) и статически опредѣлимыя жесткія балки съ цѣпями и съ шарнирными арками (§ 51 и 52 — Выпускъ V). Во всѣхъ этихъ изслѣдованіяхъ, весьма важныхъ для инженеровъ, я старался выбирать и придумывать такіе основные способы, которые не затрудняли бы память, пріучали бы изучающаго къ самостоятельному рѣшенію задачъ и давали бы въ тоже время наглядныя діаграммы, которыя легко провѣрить. Упомянемъ, между прочимъ, о томъ способѣ, когда опредѣленіе вліянія подвижной нагрузки сводится къ изслѣдованію нѣсколькихъ простыхъ случаевъ нагрузокъ; этотъ способъ представляетъ преимущества при опредѣленіи линій вліянія; даже тогда, когда требуется чисто численное рѣшеніе данной задачи, этотъ способъ можно почти всегда предпочесть вычисленію по готовымъ формуламъ *).

Второй томъ (выпускъ V—X) будетъ содержать: опредѣленіе деформацій плоскихъ фермъ, теорію статически неопредѣлимыхъ плоскихъ фермъ, а также изслѣдованіе дополнительныхъ напряже-

---

теоріи рѣшетки было сдѣлано проф. Fränkel (Civilingenieur, 1875, стр. 515); деформаціи простой треугольной сѣти онъ изслѣдовалъ съ помощью теоремы о мгновенномъ полюсѣ. Упомянемъ здѣсь о работѣ проф. Grübler'а (Riga'ische Industriezeitung, 1887, № 4 и 5), который изслѣдуетъ этотъ вопросъ также кинематическимъ путемъ, обративъ рѣшетку въ жесткую систему; это сочиненіе я получилъ по отпечатаніи отдѣла VIII и потому не могъ имъ воспользоваться. Проф. Grübler избралъ другой путь, чѣмъ я; онъ пользуется только опредѣленіемъ полюса, тогда какъ я пользуюсь перпендикулярными скоростями въ связи съ опредѣленіемъ полюса, и рядомъ съ вопросомъ о жесткости разбираю вопросъ о статической опредѣлимости.

*) См. примѣры въ № 187, 184 (Выпускъ IV), № 198, 201 и въ § 49 (Выпускъ V).

ній въ желѣзныхъ конструкціяхъ; третій томъ будетъ заключать въ себѣ: сложеніе и разложеніе силъ въ пространствѣ (въ первомъ томѣ объ этомъ говорится вкратцѣ), теорію рѣшетки въ пространствѣ, теорію давленія земли и изслѣдованіе подпорныхъ стѣнъ, быковъ и сводовъ.

Ганноверъ. Сентябрь 1887.

H. Müller-Breslau.

ОГЛАВЛЕНІЕ

ВЫПУСКА I.

ОТДѢЛЪ I.

Сложеніе и разложеніе силъ. Статическіе моменты.

ОТДѢЛЪ II.

Моменты высшихъ степеней параллельныхъ силъ, лежащихъ въ одной плоскости. Моменты инерціи и центробѣжные моменты плоскихъ сѣченій.

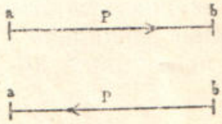
ОТДѢЛЪ III.

Напряженія въ прямолинейныхъ стержняхъ.

Введеніе.

Графическая статика учитъ сложенію и разложенію силъ геометрическимъ путемъ. а также опредѣляетъ условія равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на тѣло. Многія задачи, напримѣръ, опредѣленіе центровъ тяжести, моментовъ инерціи и измѣненія формы (деформаціи) твердыхъ тѣлъ сводятся при помощи графической статики къ задачамъ на силы; пользуясь аналитическими изслѣдованіями, графическая статика рѣшаетъ эти задачи графическимъ путемъ или указываетъ ихъ результатъ также геометрическимъ путемъ.

Величина и положеніе силы выражается въ графической статикѣ длиной и направленіемъ прямой линіи. Положеніе силы опредѣляется ея направленіемъ и точкой, чрезъ которую проходитъ это направленіе, а также теченіемъ этого направленія. Теченіе выражается нагляднѣе всего посредствомъ стрѣлки или, если сила должна быть обозначена на чертежѣ посредствомъ начальной и конечной буквъ, то порядкомъ этихъ буквъ. Такъ напр., сила P (фиг. 1) выражается отрѣзкомъ ab, потому что она дѣйствуетъ отъ точки a по направленію къ точкѣ b; сила P (фиг. 2) выражается отрѣзкомъ ba, потому что она дѣйствуетъ отъ точки b — къ a.



Фиг. 1 и 2.

Графическое изображеніе силъ, дѣйствующихъ на тѣло, называется *многоугольникомъ силъ*. Для построенія такого многоугольника необходимо задать *масштабъ силъ*. Обыкновенно принимаютъ, что прямой линіи длиною въ 1 мм. соотвѣтствуетъ сила въ m килограммовъ или $= \frac{m}{1000}$ тоннъ; такимъ образомъ въ многоугольникѣ силъ, начерченномъ въ масштабѣ 10 мм. = 2000 килограммовъ = 2 тоннамъ, линія длиною въ 62 мм. будетъ изображать силу въ 12,4 тонны.

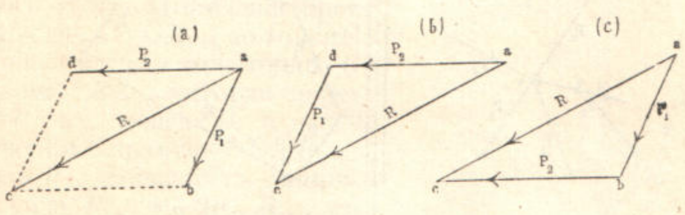
ОТДѢЛЪ I.

Сложеніе и разложеніе силъ. Статическіе моменты.

§ 1.

Сложеніе силъ, дѣйствующихъ въ одной плоскости. Условія равновѣсія.

1. Сложеніе двухъ силъ. Пусть на точку *a* дѣйствуютъ двѣ силы P_1 и P_2; ихъ направленіе и величина обозначены направленіемъ и длиной линій *ab* и *ad* (фиг. 3 a); тогда *ихъ равнодѣйствующая R* будетъ равна діагонали *ac* параллелограмма *abcd*, построеннаго на силахъ.—Можно также получить равнодѣйствующую R, откладывая силы одну за другой, не измѣняя ихъ величины, направленія и теченія, либо въ порядкѣ P_2, P_1 (фиг. 3 b), либо въ порядкѣ

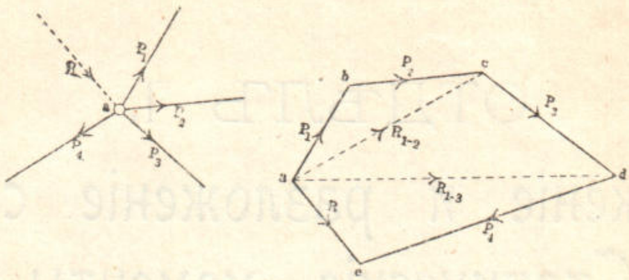


Фиг. 3 a, b и c.

P_1, P_2 (фиг. 3 c), соединивъ начальную точку полученнаго многоугольника силъ *a* съ его послѣдней точкой прямой линіей *ac*. Треугольники *adc* и *abc* называются *треугольниками силъ*.

И обратно, съ помощью пареллелограмма силъ (или съ помощью треугольника силъ) можно разложить силу R на двѣ *составляющія силы* P_1 и P_2, направленія которыхъ даны и которыя пересѣкаютъ R въ одной и той-же точкѣ *a*.

2. Сложеніе произвольнаго числа силъ, приложенныхъ къ одной точкѣ. Фиг. 4 (a и b). Если требуется нѣсколько силъ P_1, P_2, P_3, P_4, дѣйствующихъ на одну точку, сложить въ одну равнодѣйствующую R, то складываютъ (лучше на отдѣльныхъ чертежахъ) силы P_1 и P_2 при помощи треугольника силъ *abc* и получаютъ равнодѣйствующую R_{1-2}, потомъ складываютъ R_{1-2}

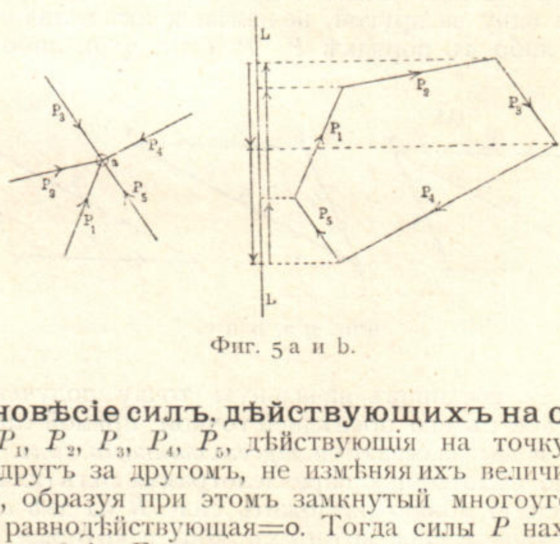


Фиг. 4 a и b.

съ P_3 и получаютъ R_{1-3}, которую складываютъ съ P_4 и получаютъ $R_{1-4}=R$. Къ тому-же результату можно придти, если откладывать силы P_1, P_2, P_3, P_4, одну за другой, не измѣняя ихъ величинъ, направленій и теченій; тогда получится многоугольникъ силъ *abcde*, послѣднюю точку котораго соединяютъ съ начальной точкой *a* прямой *ae*, которая и будетъ искомой R.

Итакъ, равнодѣйствующая $ae = R$ замыкаетъ многоугольникъ *abcde*, построенный изъ силъ P_1, P_2, P_3, P_4.

Порядокъ, по которому соединяютъ силы P, безразличенъ, такъ какъ прежде было доказано, что равнодѣйствующую двухъ силъ P_1, P_2 можно получить замыканіемъ многоугольника силъ $P_2—P_1$ (фиг. 3 b) или многоугольника силъ $P_1 — P_2$ (фиг. 3 c).



Фиг. 5 a и b.

3. Равновѣсіе силъ, дѣйствующихъ на одну точку. Если силы P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, дѣйствующія на точку *a* (фиг. 5 a), откладывать другъ за другомъ, не измѣняя ихъ величины, направленія и теченія, образуя при этомъ замкнутый многоугольникъ (фиг. 5 b), то ихъ равнодѣйствующая=0. Тогда силы P находятся между собою въ равновѣсіи. Если проектировать многоугольникъ силъ на какую нибудь прямую линію LL и вообразить себѣ каждую изъ силъ P разложенной на двѣ составляющія силы: одну параллельную, а другую перпендикулярную къ LL, то получимъ, что сумма составляющихъ по направленію LL, т. е. сумма проекцій силъ P на прямую $LL = 0$.

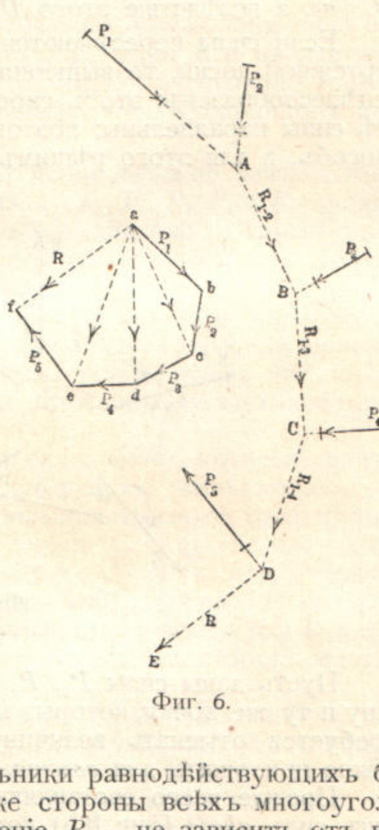
Надо замѣтить, что многоугольникъ силъ только тогда называется замкнутымъ, если въ немъ всѣ силы идутъ по одному теченію, такъ что можно, слѣдя по стрѣлкамъ, обвести весь многоугольникъ безъ остановки.

Многоугольникъ силъ на фиг. 5 b обладаетъ непрерывнымъ обводомъ, тогда какъ многоугольникъ силъ на фиг. 4 b прерывается стрѣлкой силы R.

Если измѣнить теченіе любой стороны сомкнутаго многоугольника силъ, то она дѣлается равнодѣйствующей остальныхъ силъ.

4. Сложеніе силъ, дѣйствующихъ на разныя точки. Если надо найти равнодѣйствующую R силъ P_1, P_2, P_3, P_4, которыя дѣйствуютъ не на одну и ту же точку, то продолжаемъ двѣ силы P_1 и P_2 до пересѣченія и находимъ ихъ равнодѣйствующую R_{1-2}, которая должна пройти черезъ точку пересѣченія силъ P_1 и P_2. Равнодѣйствующую R_{1-2} соединяютъ такимъ-же образомъ съ силою P_3, получаютъ равнодѣйствующую R_{1-3}, которую соединяютъ опять съ силою P_4, получаютъ силу R_{1-4} и т. д.

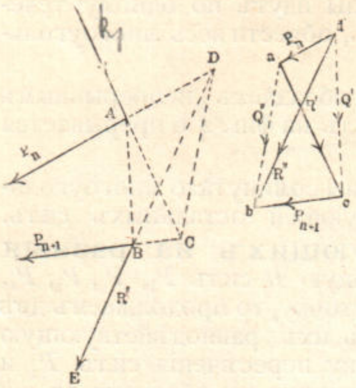
Рекомендуется величины и направленія силъ R опредѣлить на отдѣльномъ чертежѣ. На фиг. 6 произведено сложеніе силъ P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, какъ вышесказано.



Фиг. 6.

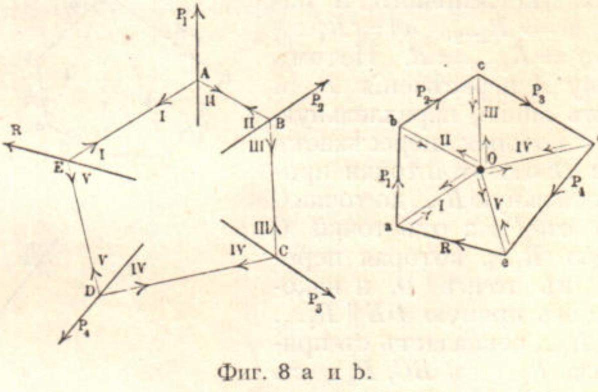
Послѣ построенія изъ этихъ силъ непрерывнаго многоугольника силъ *abcdef* узнаемъ, что равнодѣйствующія (по величинѣ и направленію) $ac = R_{1-2}$, $ad = R_{1-3}$, $ae = R_{1-4}$, $af = R_{1-5} = R$. Потомъ черезъ точку A пересѣченія P_1 и P_2 проводимъ линію, параллельную линіи R_{1-2}, которая пересѣкаетъ P_3 въ точкѣ B; отъ этой точки проведемъ параллельную R_{1-3} до точки C пересѣченія съ P_4, а отъ точки C параллельную R_{1-4}, которая пересѣкаетъ P_5 въ точкѣ D, и наконецъ проводимъ прямую $DE \parallel R_{1-5}$. Тогда сила R_{1-2} совпадаетъ съ прямой AB, сила R_{1-3} съ BC, R_{1-4} съ CD, R_{1-5} съ DE. Многоугольникъ $ABCD$ называется *многоугольникомъ равнодѣйствующихъ силъ* P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Такъ какъ порядокъ, въ которомъ соединяются силы, можно произвольно мѣнять, то и многоугольники равнодѣйствующихъ будутъ получаться разные. Послѣднія-же стороны всѣхъ многоугольниковъ совпадутъ, такъ какъ положеніе R_{1-5} не зависитъ отъ выбора порядка. Для того чтобы это было ясно, достаточно доказать, что измѣненіе въ порядкѣ двухъ силъ P_n и P_{n+1} остается безъ вліянія на положеніе R, потому что при повтореніи такого измѣненія изъ одного порядка можно вывести всякій другой.

Если равнодѣйствующую R' силъ P_1 до P_{n-1} сложить прежде съ P_n, причемъ получится сила Q' (фиг. 7), а потомъ съ P_{n+1}, причемъ получится сила R'', то получимъ многоугольникъ равнодѣйствующихъ силъ ABE, въ которомъ $AB \parallel dc$. Теперь сложимъ сначала R' съ P_{n+1}, причемъ получимъ силу Q'', и затѣмъ Q'' съ P_n, причемъ получимъ R'', потомъ силу R' продолжимъ до пересѣченія съ силою P_{n+1} въ точкѣ C, а изъ точки C проведемъ линію параллельную Q'', которая встрѣтитъ P_n, въ точкѣ D, и наконецъ изъ точки D проводимъ линію, параллельную силѣ R''; эта послѣдняя совпадаетъ съ прежде найденной R'', потому что въ двухъ четыреугольникахъ $ABCD$ и $abcd$ 5 соотвѣтственныхъ сторонъ параллельны между собою, а именно $AB \parallel dc$, $BC \parallel bc$, $CD \parallel ba$, $Da \parallel da$, $AC \parallel ac$, а вслѣдствіе этого $DB \parallel db$.



Фиг 7.

Если силы пересѣкаются подъ очень острымъ угломъ или внѣ чертежной доски, то вышеописанный способъ опредѣленія R будетъ нецѣлесообразенъ; этотъ способъ нельзя примѣнять и тогда, когда всѣ силы параллельны; поэтому нужно вывести другой, болѣе общій способъ, а для этого рѣшимъ сначала такую задачу.



Фиг. 8 а и b.

Пусть даны силы P_1, P_2, P_3, P_4 (фиг. 8 а), дѣйствующія не на одну и ту же точку, которыя могутъ быть между собою параллельны. Требуется отыскать величину и положеніе той силы R, которую нужно приложить для *возстановленія равновѣсія*.

Прежде всего составляютъ изъ силъ P_1, P_2, P_3, P_4, многоугольникъ силъ $abcde$ (фиг. 8 b), который замыкаютъ посредствомъ прямой ea. Тогда $ea = R$ по величинѣ, направленію и теченію. Для того чтобы опредѣлить на фигурѣ 8а положенiе R, разлагаютъ силу P_1 на двѣ произвольно направленныя силы I, II, точка приложенiя которыхъ взята произвольно на направленiи силы P_1.

Величины силъ I и II наносятся на многоугольникѣ силъ (фиг. 8 b) посредствомъ параллельныхъ имъ линiй aO и bO; теченiе ихъ находятъ посредствомъ стрѣлокъ, которыми снабжаютъ треугольникъ силъ abO въ томъ-же теченiи какъ и сила P_1, причемъ круговое теченiе должно остаться непрерывнымъ. Тогда сила I = отрѣзку Oa и II = отрѣзку bO.

Въ точкѣ пересѣченiя B двухъ силъ II и P_2 первая сила уничтожается силой равной ей по величинѣ, но противоположной по направленiю; равновѣсiе-же въ точкѣ B возстановляется силой III, величина, направленiе и теченiе которой указано на многоугольникѣ силъ линiей cO. Точно также въ точкѣ C, послѣ уничтоженiя силы III, равновѣсiе возстановляется проведенiемъ силы $\mathrm{IV} = \overline{dO}$ и въ точкѣ D послѣ уничтоженiя силы IV—проведенiемъ силы $\mathrm{V} = \overline{eO}$.

Наконецъ въ точкѣ пересѣченiя E силъ I и V эти силы уничтожены равными имъ, но противоположно направленными силами; тогда въ точкѣ E равновѣсiе возстановляется силою $R = ea$.

Такъ какъ на каждую изъ точекъ A, B, C, D, E дѣйствуютъ три силы, находящiяся въ равновѣсiи, а силы I, II, III, IV, V попарно уравновѣшиваются, то и сила R находится въ равновѣсiи съ силами P_1, P_2, P_3, P_4.

Многоугольникъ $ABCDEA$ можно разсматривать какъ ось веревки, за которую зацѣплены силы P_1, P_2, P_3, P_4 и R и въ частяхъ которой образуются силы натяженiя I, II, III, IV, V; поэтому многоугольникъ $ABCDEA$, называется *веревочнымъ* многоугольникомъ или *шарнирнымъ* многоугольникомъ.

Впрочемъ первое болѣе употребительное названiе менѣе точно, такъ какъ, при перемѣнѣ во всѣхъ силахъ P_1, P_2, P_3, P_4 и R теченiя, въ сторонахъ многоугольника образуются давленiя и самый многоугольникъ придется вообразить себѣ сдѣланнымъ изъ стержней, способныхъ сопротивляться сжатiю.

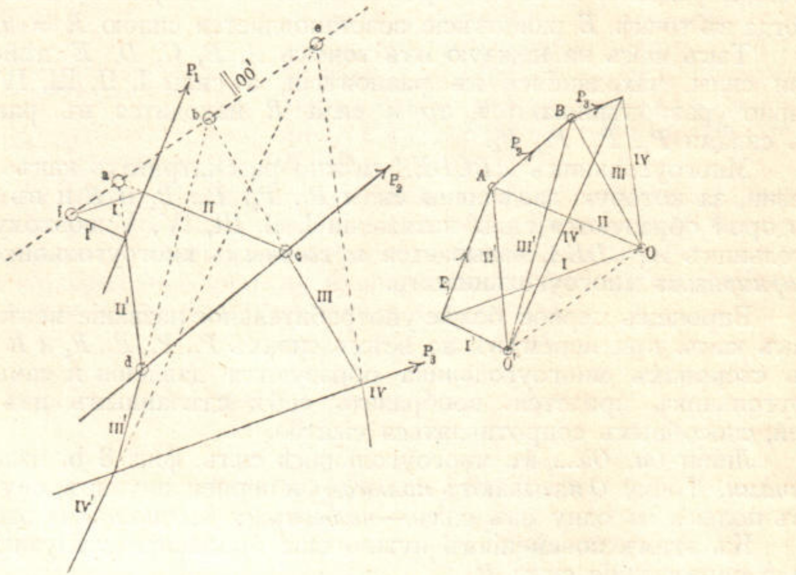
Линiи Oa, Ob.... въ многоугольникѣ силъ, фиг. 8 b, называются *лучами*. Точку O называютъ *полюсомъ* и перпендикуляръ, опущенный изъ полюса на одну изъ силъ,—*полюснымъ разстоянiемъ* этой силы.

Къ этимъ поясненiямъ нужно еще прибавить слѣдующее правило опредѣленiя силы R.

Послѣ построенiя многоугольника силъ $abcdea$, который даетъ намъ величину и направленiе силы R, выбираемъ любой полюсъ O, проводимъ лучи I, II, III..., затѣмъ изъ произвольно взятой точки (напр. A силы P_1) строимъ веревочный многоугольникъ. Стороны этого многоугольника параллельны лучамъ и каждыя двѣ изъ его сторонъ должны пересѣчься въ одной точкѣ на той изъ силъ P, которая образуетъ треугольникъ съ соотвѣтствующими лучами. Сила R пройдетъ черезъ точку пересѣченiя первой и послѣдней стороны многоугольника.

Первая и послѣдняя стороны веревочнаго многоугольника называются *крайними сторонами для данной группы силъ*. Такъ напр., для группы (P_2 и P_3) крайними сторонами будутъ II и IV. Если требуется соединить силы P_1, P_2, P_3, P_4 въ одну равнодѣйствующую, то нужно только силу R, возстановляющую равновѣсiе, замѣнить другой, равной ей, но дѣйствующей въ обратномъ направленiи. Прибавимъ, наконецъ, что на фиг. 6 на многоугольникъ равнодѣйствующихъ силъ *ABCDE* надо смотрѣть, какъ на веревочный многоугольникъ, полюсъ котораго совпадаетъ съ начальной точкой многоугольника силъ *abcdef*. Понятіе о *многоугольникѣ равнодѣйствующихъ силъ* можно расширить, примѣняя его къ каждому веревочному многоугольнику, полюсъ котораго совпадаетъ съ какой нибудь узловой точкой многоугольника силъ. Въ такомъ случаѣ лучи, проведенные отъ полюса, будутъ сторонами многоугольника силъ или равнодѣйствующими данныхъ силъ, которыя замыкаются этими лучами.

5. Зависимость между двумя веревочными многоугольниками, проведенными изъ разныхъ полюсовъ для однихъ и тѣхъ-же силъ. Фиг. 9 a и 9 b. Пусть I, II, III.... будутъ лучи, проведенные изъ полюса O, и I′, II′ . . . . . лучи проведенные изъ полюса O'; точки пересѣченія соотвѣтствующихъ сторонъ веревочнаго многоугольника I и I′, II и II′ . . . . . лежатъ на прямой линіи, параллельной линіи, соединяющей оба по-

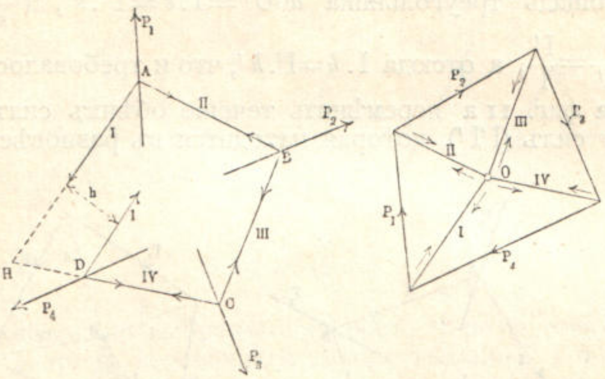


Фиг. 9 a и b.

люса OO', потому что въ четыреугольникахъ $ABOO'$ и $abcd$—5 соотвѣтствующихъ сторонъ параллельны между собой, а именно $ad \parallel AO'$, $bc \parallel BO'$, $dc \parallel AB$, $ac \parallel AO$ и $db \parallel O'B$, а слѣдовательно, и сторона ab должна быть параллельна $O'O$. Также заключаемъ, что $be \parallel O'O$ и $ia \parallel O'O$, т. е. что точки $iabe$ будутъ лежать на прямой, параллельной OO'.

Второе доказательство заключается въ слѣдующемъ: сила P_2 (фиг. 9 b) находится въ равновѣсіи какъ съ силами $\overline{O'A} = \mathrm{II}'$ и $\overline{BO'} = \mathrm{III}'$, такъ и съ силами $\overline{OA} = \mathrm{II}$ и $\overline{BO} = \mathrm{III}$, поэтому всѣ 4 силы $O'A$, BO', $-OA = AO$, $-BO = OB$ должны находиться между собою въ равновѣсіи. Равнодѣйствующая силъ $\overline{O'A} = \mathrm{II}'$ и $\overline{AO} = \mathrm{II}$ проходитъ въ фиг. 9 a черезъ точку a пересѣченія сторонъ веревочнаго многоугольника и равнодѣйствующая силъ $\overline{OB}=\mathrm{III}$ и $\overline{BO}=\mathrm{III}'$ проходитъ черезъ точку b. Обѣ равнодѣйствующія параллельны прямой OO' и должны взаимно уничтожиться, что возможно лишь тогда, когда $ab \parallel OO'$. Точно также можно доказать, что $ia \parallel OO'$ и $bc \parallel OO'$.

6. Безконечно удаленная и безконечно малая сила какъ равнодѣйствующая конечныхъ силъ. Пара силъ. Если силамъ P_1, P_2, P_3, P_4 (фиг. 10) соотвѣтствуетъ замкнутый многоугольникъ силъ, то ихъ равнодѣйствующая $=0$.



Фиг. 10.

Веревочный многоугольникъ, начерченный съ помощью полюса O, вообще не замыкается. Если допустить, что на точки A, B, C, D дѣйствуютъ силы, то получимъ состояніе равновѣсія, такъ какъ на каждую точку дѣйствуютъ три силы, находящіяся между собою въ равновѣсіи. Попарно-же изъ этихъ силъ уравновѣшиваютъ другъ друга только силы II, III, IV, такъ что силы P_1, P_2, P_3, P_4 находятся въ равновѣсіи не только между собою, но и съ двумя силами I. Эти двѣ силы пересѣкаются въ плоскости на безконечно далекомъ разстояніи; ихъ равнодѣйствующая безконечно мала; если замѣнить ее равной, но противоположно направленной силой, то мы получимъ *безконечно удаленную безконечно малую равнодѣйствующую* силъ P_1, P_2, P_3, P_4.

Силы I на фиг. 10 а образуютъ *пару силъ* и ихъ взаимное разстояніе называется *плечомъ*, а произведеніе изъ силы на плечо

$$M=\mathrm{I}\,.\,h$$

называется *моментомъ пары силъ*; *онъ независимъ отъ положенія полюса* и принимается вслѣдствіи этого какъ мѣра пары силъ, равныхъ безконечно удаленной и безконечно малой силѣ.

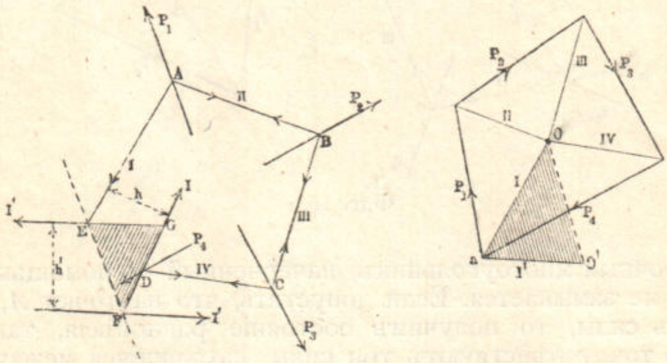
Доказательство этого положенія слѣдующее: пусть будетъ O', (фиг. 11) новый полюсъ; тогда прямая, соединяющая точку E пересѣченія соотвѣтствующихъ первыхъ сторонъ веревочныхъ многоугольниковъ I и I' съ точкой F пересѣченія соотвѣтствующихъ послѣднихъ сторонъ I и I', будетъ параллельна линіи OO', соединяющей оба полюса. Поэтому данное положеніе первой стороны I' новаго веревочнаго многоугольника опредѣляетъ положеніе послѣдней стороны I', а вмѣстѣ съ этимъ опредѣляетъ и величину момента $M=\mathrm{I}'\,.\,h'$ пары силъ (I' I') при плечѣ h'.

Если продолжить первую сторону I′ до точки G пересѣченія ея съ послѣдней стороной I, то получимъ треугольникъ GEF, подобный треугольнику aOO'. Если s и s' обозначаютъ въ послѣднемъ треугольникѣ длину перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ угловъ O' и O на стороны I и I′, то получимъ

$$\frac{h}{h_1}=\frac{s}{s'}$$

Двойная площадь треугольника $aOO'=\mathrm{I}.s=\mathrm{I}'.s'$, и $\frac{s}{s_1}=\frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{I}}$; слѣдовательно $\frac{h}{h'}=\frac{\mathrm{I}'}{\mathrm{I}}$, а отсюда $\mathrm{I}.h=\mathrm{I}'.h'$, что и требовалось доказать.

Если на фиг. 11 а перемѣнить теченіе обѣихъ силъ I′, то получимъ пару силъ (I′I′), которая находится въ равновѣсіи съ парой



Фиг. 11.

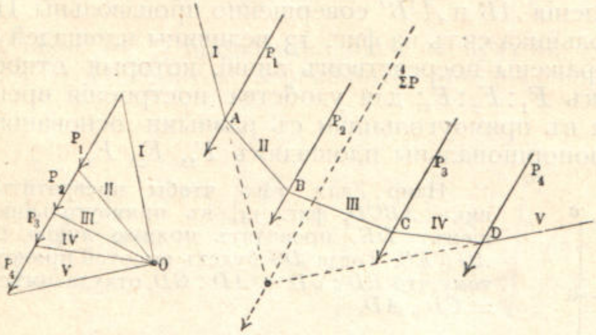
силъ (I.I). Моменты обѣихъ паръ равны и противоположны по направленію вращенія.

7. Условія равновѣсія. Если перемѣстить на фиг. 10 а силу P_4 параллельно самой себѣ до тѣхъ поръ, пока она не пройдетъ черезъ точку H пересѣченія сторонъ I и IV веревочнаго многоугольника, то веревочный многоугольникъ будетъ замкнутъ. Обѣ силы натяженія I взаимно уничтожаются, а силы P_1, P_2, P_3, P_4 находятся въ равновѣсіи. *Независимый отъ положенія полюса* моментъ $\mathrm{I}.h$ вслѣдствіи перемѣщенія P_4 будетъ равенъ нулю, а вмѣстѣ съ нимъ исчезнетъ и та безконечно удаленная, безконечно малая сила, которую надо было раньше прибавить для возстановленія равновѣсія.

Такимъ образомъ для равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на различныя точки одной и той-же плоскости, необходимо и достаточно, чтобы этимъ силамъ соотвѣтствовалъ замкнутый многоугольникъ силъ и замкнутый веревочный многоугольникъ или—что одно и тоже—чтобы эти многоугольники не имѣли равнодѣйствующей.

Ко второму выраженію условія равновѣсія надо прибавить, что силы не должны также имѣть и безконечно удаленной, безконечно малой равнодѣйствующей.

8. Силы, параллельныя между собой. Опредѣленіе центра тяжести произвольной площади. Примѣненіе веревочнаго многоугольника оказывается очень выгоднымъ, если надо опредѣлить равнодѣйствующую силъ P_1, P_2, P_3, P_4, параллельныхъ между собою (фиг. 12 b). Въ этомъ случаѣ многоугольникъ силъ образуетъ прямую линію (фиг. 12 a); пусть точка O

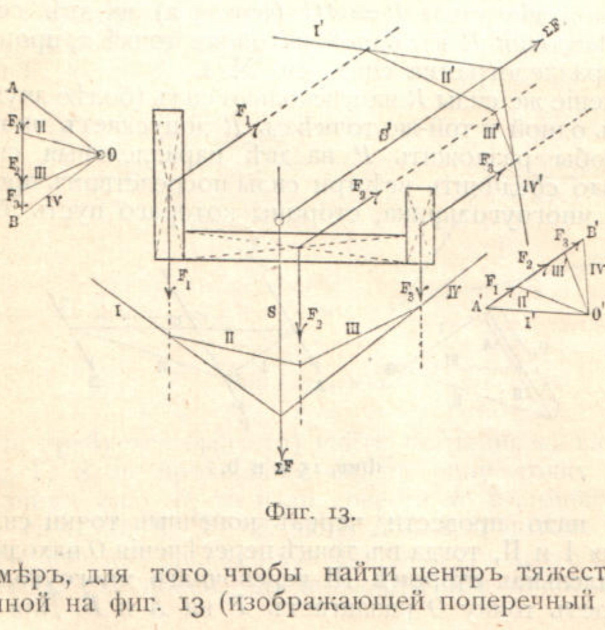


Фиг. 12 a и b.

будетъ произвольно выбранный полюсъ. Черезъ точку пересѣченія крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника I и V проходитъ равнодѣйствующая

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \sum_1^4 P.$$

Веревочнымъ многоугольникомъ можно также воспользоваться для опредѣленія графическимъ способомъ центра тяжести площади, которую можно раздѣлить на отдѣльныя части съ данными центрами тяжести.

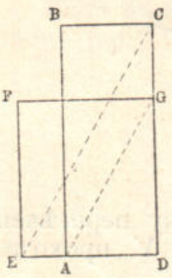


Фиг. 13.

Напримѣръ, для того чтобы найти центръ тяжести площади, представленной на фиг. 13 (изображающей поперечный разрѣзъ чугунной балки), надо принять площади трехъ прямоугольниковъ F_1, F_2, F_3, изъ которыхъ состоитъ данная площадь, за силы, параллельныя между собою, которыя дѣйствуютъ сперва по направленію AB, а, потомъ по направленію $A'B'$.

Затѣмъ надо опредѣлить для обоихъ случаевъ положеніе равнодѣйствующей ΣF. Такимъ образомъ опредѣляются двѣ оси S и S', точка пересѣченія которыхъ даетъ искомый центръ тяжести.

Направленія AB и $A'B'$ совершенно произвольны. При построеніи многоугольника силъ на фиг. 13 величины площадей прямоугольниковъ изображены посредствомъ линій, которыя относятся другъ къ другу какъ $F_1 : F_2 : F_3$; для удобства построенія превратимъ всѣ три площади въ прямоугольники съ равными основаніями, высоты которыхъ пропорціональны площадямъ F_1, F_2, F_3.



Фиг. 14.

Напр, для того чтобы превратить прямоугольникъ $ABCD$, фиг. 14, въ прямоугольникъ съ основаніемъ $= DE$, проводятъ прямую линію CE, а потомъ $AG \parallel EC$. Тогда DG будетъ высотой прямоугольника, потому что $ED : CD = AD : GD$, откуда имѣемъ $ED \,.\, GD = CD \,.\, AD$.

Если требуется отыскать центръ тяжести криволинейной фигуры, то надо разбить ее на полосы по возможности одной ширины и настолько узкія, чтобъ ихъ можно было съ достаточной точностью принять за прямоугольники, трапеціи или треугольники.

---

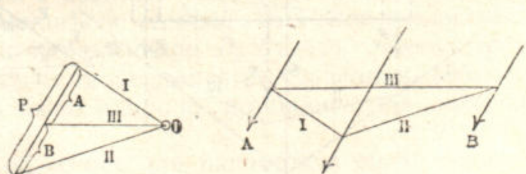
§ 2.

Разложеніе силъ на плоскости.

9. Разложеніе силы $R = \overline{AC}$ (фиг. 3 а) на двѣ составляющія силы, пересѣкающія R въ одной и той же точкѣ a, производится съ помощью параллелограмма силъ, см. № 1.

Разложеніе же силы R на нѣсколько силъ (болѣе двухъ), пересѣкающихся въ одной и той-же точкѣ съ R допускаетъ много рѣшеній.

10. Чтобы разложить P на двѣ параллельныя силы A и B (фиг. 15), надо соединить всѣ три силы посредствомъ произвольнаго веревочнаго многоугольника, стороны котораго пусть будутъ I, II,

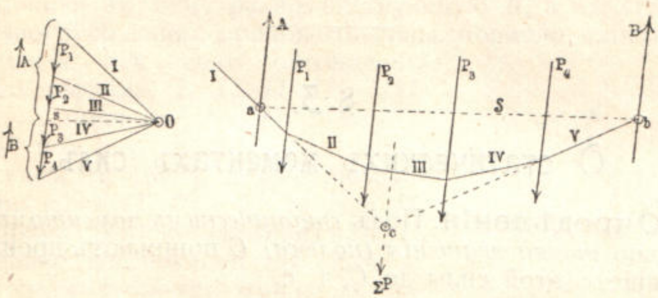


Фиг. 15 а и b.

III. Потомъ надо провести черезъ конечныя точки силы P линіи, параллельныя I и II, тогда въ точкѣ пересѣченія O находимъ полюсъ. Линія, параллельная сторонѣ III веревочнаго многоугольника, проведенная черезъ точку O разлагаетъ P на A и B. Для того чтобы доказать это, надо соединить A и B съ помощью соотвѣтственнаго веревочнаго многоугольника въ одну равнодѣйствующую. Тогда найдемъ, что эта равнодѣйствующая $= A + B = P$ проходитъ черезъ точку пересѣченія крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника. См. № 8.

11. Такимъ-же образомъ рѣшается слѣдующая важная задача, а именно: найти двѣ параллельныя силы A и B (фиг. 16), имѣющія данное положеніе, которыя уравновѣшиваютъ параллельныя силы P_1, P_2, P_3, P_4.

Силы P (фиг. 16 a) проводятся одна за другой, затѣмъ выбирается полюсъ O и строится веревочный многоугольникъ, у кото-

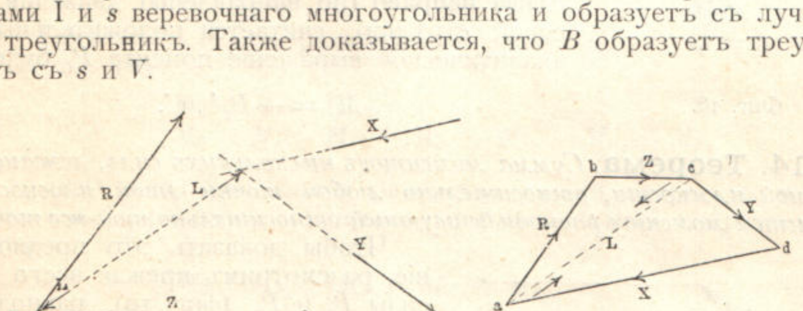


Фиг. 16 a и b.

раго крайнія стороны I и V (черезъ точку пересѣченія ихъ проходитъ равнодѣйствующая $R = \Sigma P$) пересѣкаютъ направленія A и B въ точкахъ a и b.

Веревочный многоугольникъ замыкается линіей s, которая соединяетъ точки a и b; затѣмъ черезъ полюсъ O проводимъ линію, параллельную s.

Эта линія разлагаетъ силу $R = \Sigma P$ на A и B. Верхняя часть $= A$, потому что эта сила находится въ точкѣ a въ равновѣсіи съ силами I и s веревочнаго многоугольника и образуетъ съ лучами I и s треугольникъ. Также доказывается, что B образуетъ треугольникъ съ s и V.



Фиг. 17 a и b.

12. Если требуется (фиг. 17) найти по даннымъ направленіямъ три силы X, Y, Z, не проходящія черезъ одну точку и уравновѣшивающія данную силу R, то надо довести до взаимнаго пересѣченія попарно силы R, X, Y, Z, напр. R и Z, а потомъ X и Y, и прибавить къ нимъ двѣ уравновѣшивающія другъ друга силы L, которыя совпадаютъ съ линіей, соединяющей обѣ точки пересѣченія.

Потомъ опредѣляютъ L и Z, изъ того условія, что силы R, L и Z уравновѣшиваются въ точкѣ пересѣченія $(R\,Z)$ и что, поэтому, имъ долженъ соотвѣтствовать замкнутый треугольникъ *abca*, фиг. 17 b; а силы X и Y опредѣляютъ изъ того условія, что обѣ эти силы съ найденной силой L находятся въ равновѣсіи въ точкѣ $(X\ Y)$.

Если требуется *разложить* данную силу на три силы X, Y и Z, положеніе которыхъ дано и которыя не проходятъ черезъ одну точку, то выше найденныя силы X, Y, Z надо замѣнить (фиг. 17 b) силами, равными, но противоположно направленными.

Разложеніе одной силы по четыремъ или болѣе направленіямъ въ одной плоскости допускаетъ безконечное количество рѣшеній.

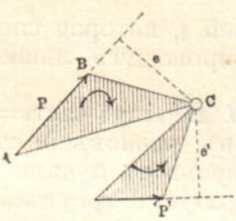
§ 3.

О статическихъ моментахъ силъ.

13. Опредѣленія. Подъ *статическимъ моментомъ* M силы P относительно *точки вращенія (полюса)* C понимаютъ произведеніе P на разстояніе e этой силы до C, т. е.

$$M = P \,.\, e.$$

Въ геометрическомъ смыслѣ моментъ M равняется удвоенной площади треугольника ABC (фиг. 18), у котораго основаніе сила P, а вершина точка вращенія C. Направленіе вращенія этого треугольника обозначается теченіемъ силы P.

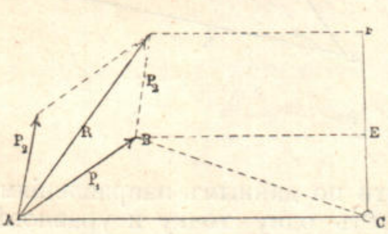


Фиг. 18.

Моменты силъ P и P' (фиг. 18) имѣютъ поэтому противоположныя направленія вращенія. Моментъ $M = P.\ e$, имѣющій вращеніе слѣва направо (по направленію движенія часовой стрѣлки), считается положительнымъ; аналитическое выраженіе момента P_1 будетъ:

$$M' = -P_1{}' \,.\, e'.$$

14. Теорема. *Сумма моментовъ нѣсколькихъ силъ, лежащихъ въ одной плоскости, относительно любой точки этой плоскости, равняется моменту равнодѣйствующей относительно той-же точки.*



Фиг. 19.

Чтобы доказать это предложеніе, разсмотримъ прежде всего двѣ силы P_1 и P_2 (фиг. 19), равнодѣйствующая которыхъ будетъ R; соединимъ точку ихъ пересѣченія A съ точкою вращенія C прямою линіей и спроектируемъ силы P_1, P_2 и R на линію CF, перпендикулярную къ AC. Пусть проекціи этихъ силъ будутъ $\overline{CE} = P_1{}'$, $\overline{EF} = P_2{}'$, $\overline{CF} = R'$, тогда моментъ силы P_1:

$$M_1 = 2\,\Delta ABC = \overline{AC} \,.\, P_1{}',$$

моментъ силы P_2:

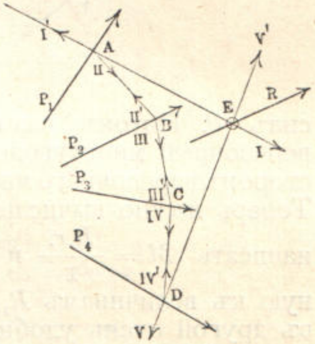
$$M_2 = \overline{AC} \,.\, P_2'$$

и моментъ силы R:

$$M = \overline{AC} \,.\, R'.$$

Такъ какъ $R' = P_1' + P_2'$, то отсюда слѣдуетъ $M = M_1 + M_2$, что и требовалось доказать.

Чтобы примѣнить эту теорему къ силамъ, дѣйствующимъ на плоскости въ различныхъ направленіяхъ, напр., къ силамъ P_1, P_2, P_3, P_4 (фиг. 20 *), надо сложить эти силы при помощи веревочнаго многоугольника въ одну равнодѣйствующую R, а къ угламъ веревочнаго многоугольника приложить силы, попарно взаимно уравновѣшивающіяся; эти силы обозначены на фиг. 20 цифрами I, I', II, II', III, III', ... причемъ $I = I'$, $II = II'$, $III = III'$ и т. д.



Фиг. 20.

Такъ какъ въ точкѣ A уравновѣшиваются три силы II, I' и P_1, то сила II, равная и прямо противоположная силѣ II', будетъ равнодѣйствующей для силъ I' и P_1, и поэтому моментъ этой силы равняется суммѣ моментовъ силъ I' и P_1. Если же вообще моментъ какой нибудь силы Q будемъ обозначать буквой M_Q, то получимъ

$$M_{II'} = M_{I'} + M_{P_1},$$

а также

$$M_{III'} = M_{II'} + M_{P_2}$$
$$M_{IV'} = M_{III'} + M_{P_3}$$
$$M_{V'} = M_{IV'} + M_{P_4} = M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4}.$$

Такъ какъ R есть равнодѣйствующая силъ V' и I, то отсюда слѣдуетъ, что

$$M_R = M_I + M_{V'} \text{ т. е.}$$
$$M_R = M_I + M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4};$$

въ правой части послѣдняго равенства можно сократить моменты силъ I и I', равныхъ, но прямо противоположно направленныхъ. Тогда

$$M_R = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4},$$

что и требовалось доказать.

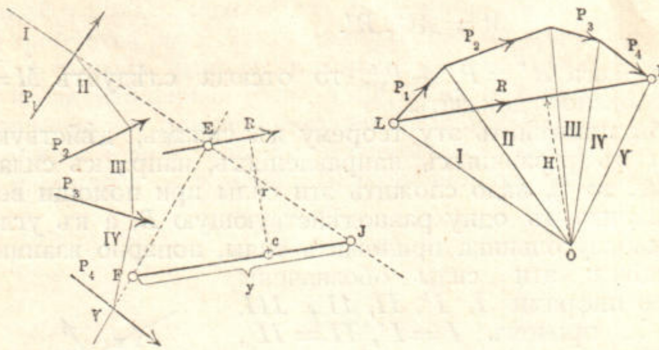
Это доказательство можно распространить также и на произвольное число силъ.

15. Опредѣленіе статическихъ моментовъ произвольнаго числа силъ, дѣйствующихъ на одной и той-же плоскости. Чтобы получить моментъ силъ P_1, P_2, P_3, P_4, относительно точки вращенія C, надо (фиг. 21) прежде всего оты-

---

*) Смотри также фиг. 21

скать равнодѣйствующую R, а для этого надо замкнуть многоугольникъ силъ P_1, P_2, P_3, P_4 линіей $\overline{LN} = R$ и снабдить эту линію стрѣлкой, направленія противоположнаго общему направленію стрѣлокъ



Фиг. 21 а и b.

силъ P. Потомъ надо взять произвольный полюсъ O и построить веревочный многоугольникъ; въ точкѣ пересѣченія E двухъ крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника найдемъ одну изъ точекъ силы R. Теперь можно вычислить или построить $M = R.\ r$. Для этого можно написать $M = \dfrac{R.r.}{1}$ и построить M, какъ четвертую пропорціональную къ величинамъ R, r, 1. Величину M можно представить еще и въ другой очень удобной формѣ. Если провести черезъ точку вращенія C линію, параллельную R, которая пересѣчетъ стороны веревочнаго многоугольника I и V въ точкахъ J и F, и принять $\overline{FJ} = y$, то изъ подобія двухъ треугольниковъ EFJ и OLN (у которыхъ стороны соотвѣтственно параллельны) получимъ:

$$r : y = H : R,$$

гдѣ H означаетъ полюсное разстояніе силы R. Мы имѣемъ также, что $H.y = R.r$, откуда $M = H\,.\,y$.

Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Статическій моментъ произвольнаго числа силъ, лежащихъ на плоскости, относительно точки, взятой на той же плоскости, равняется произведенію изъ полюснаго разстоянія ихъ равнодѣйствующей R на отрѣзокъ, отсѣкаемый внѣшними сторонами веревочнаго многоугольника на прямой, проведенной параллельно R, черезъ точку, относительно которой берется моментъ.

Знакъ момента опредѣляется направленіемъ вращенія. Моментъ силы R на фиг. 21 а будетъ положительнымъ, такъ какъ вращеніе его происходитъ слѣва на право.

Чѣмъ ближе лежитъ C отъ R, тѣмъ менѣе дѣлается y и тѣмъ менѣе становится M. Если C совпадаетъ съ R, то $y = 0$. Если C находится выше R, то y надо считать отрицательнымъ и тогда получимъ отрицательный M. Этотъ способъ выраженія момента имѣетъ то преимущество, что при произвольномъ положеніи полюса полюсное разстояніе H можно выразить круглымъ числомъ. Если принять $H = 1$, то получимъ

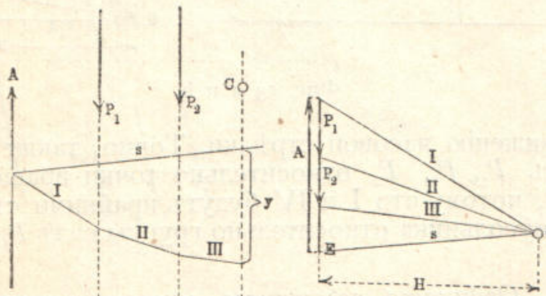
$$M = y.$$

Въ произведенiи $R.r$ величина R выражается въ единицахъ силы (напр., въ килограммахъ), а r въ единицахъ длины (напр., въ метрахъ), при вычисленiи же $H.y$ будетъ безразлично, выражено-ли H въ масштабѣ силъ, а y въ линейномъ масштабѣ или наоборотъ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ подразумѣвать подъ H силу.

16. Параллельныя силы на плоскости. Теорема, высказанная въ № 15, находитъ себѣ примѣненiе при опредѣленiи моментовъ параллельныхъ силъ.

Положимъ, напримѣръ, что надо отыскать моментъ параллельныхъ силъ A, P_1, P_2, (фиг. 22) относительно точки вращенiя C; сложимъ эти силы въ послѣдовательномъ порядкѣ A, P_1, P_2 и проведемъ изъ произвольнаго полюса лучи s, I, II и III. Лучъ s проходитъ черезъ начало, а лучъ III черезъ конецъ многоугольника силъ; кромѣ того на фиг. 22 а, гдѣ представленъ веревочный



Фиг. 22 а и b.

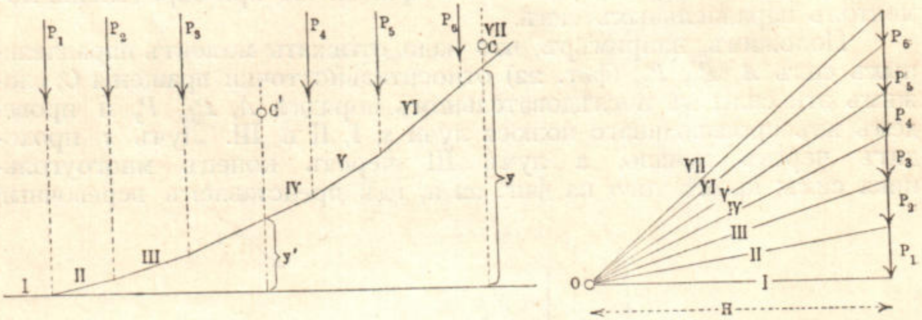
многоугольникъ, стороны s и III будутъ крайними; онѣ отсѣкаютъ отрѣзокъ y на прямой линiи, проведенной черезъ точку C, параллельно равнодѣйствующей $A-P_1-P_2$; этотъ отрѣзокъ, помноженный на полюсное разстоянiе равнодѣйствующей, т. е. на величину перпендикуляра H, опущеннаго изъ полюса на многоугольникъ силъ, дастъ требуемый моментъ.

Моментъ $M = H.y$ будетъ положительнымъ, потому что, при $A > P_1 + P_2$, равнодѣйствующая $R = A - P_1 - P_2$ дѣйствуетъ въ томъ же направленiи, какъ A, а именно вверхъ; кромѣ того R лежитъ влѣво отъ точки вращенiя C, потому что эта сила проходитъ черезъ точку пересѣченiя продолженныхъ сторонъ веревочнаго многоугольника III и s. Отсюда слѣдуетъ, что моментъ силы R вращается слѣва направо.

17. Другая важная задача заключается въ слѣдующемъ: Даны параллельныя силы P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6; требуется найти моментъ M этихъ силъ относительно точки вращенiя C, и затѣмъ моментъ M' силъ P_1, P_2, P_3 относительно точки вращенiя C' (фиг. 23).

Сложимъ силы другъ за другомъ въ такомъ порядкѣ P_6, P_5,... P_1 (фиг. 23 b) и выберемъ полюсъ на произвольномъ разстоянiи H отъ многоугольника силъ, но такимъ образомъ, чтобы лучъ I былъ перпендикуляренъ къ направленiю силъ P.

Затѣмъ построимъ веревочный многоугольникъ и продолжимъ сторону I (фиг. 23 а). Проведемъ черезъ точку C линiю, параллельную равнодѣйствующей $\sum_{1}^{6} P$, измѣримъ отрѣзокъ y, отсѣченный на этой параллельной линіи крайними сторонами многоугольника I и VII, тогда получимъ $M_C = -Hy$. Этотъ моментъ будетъ отрицательнымъ, потому что всѣ силы вращаются около C, по направленію,



Фиг. 23 a и b.

обратному движенію часовой стрѣлки. Точно также найдемъ, что моментъ силъ P_1, P_2, P_3 относительно точки вращенія C' будетъ $M_{C'} = -H.y'$, потому-что I и IV будутъ крайними сторонами веревочнаго многоугольника относительно группы силъ P_1, P_2, P_3.

Итакъ:

Ордината веревочнаго многоугольника, построеннаго для параллельныхъ силъ, фиг. 23 a, взятая до той стороны I, которая проведена перпендикулярно къ направленію силъ, будетъ пропорціональна моменту силъ, лежащихъ впереди ординаты, относительно какой либо точки этой ординаты.

---

§ 4.

Сложеніе силъ въ пространствѣ *).

18. Статическіе моменты и равнодѣйствующая параллельныхъ силъ. Пусть параллельныя силы P_1, P_2, P_3. . . . пересѣкаются въ точкахъ A_1, A_2, A_3, ... плоскостью, перпендикулярною къ направленію этихъ силъ (фиг. 24); пусть x_m и y_m (причемъ m обозначаетъ произвольный нумеръ) будутъ координатами точки A_m относительно косоугольныхъ координатныхъ осей, лежащихъ въ плоскости E; произведенія $P_m x_m$ и $P_m y_m$ называется статическими моментами силы P_m относительно осей x и y.

Пусть ξ и η будутъ координаты точки S, въ которой плоскость E пересѣкается равнодѣйствующей $R = P_1 + P_2 + \ldots = \Sigma P$; можно доказать, что

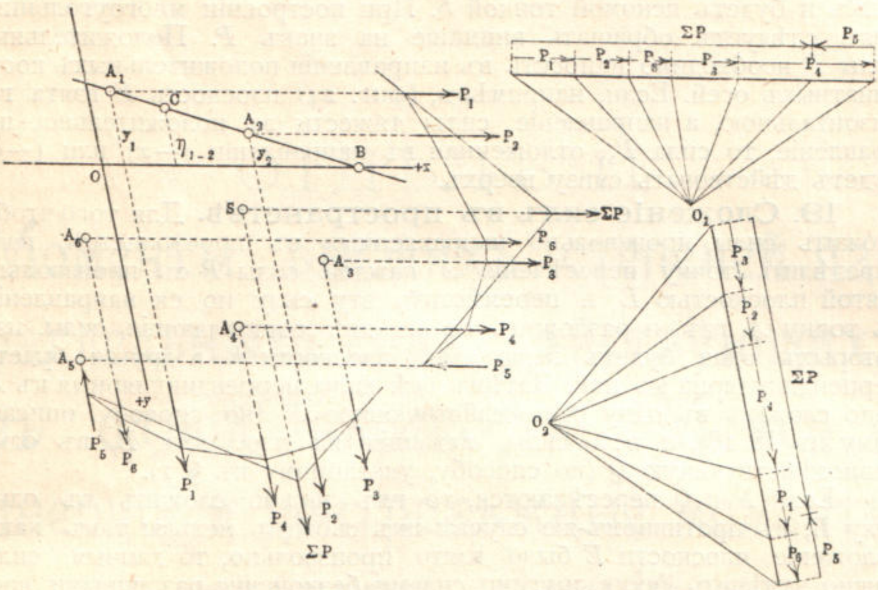
(1) $$R\eta = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \ldots = \Sigma Py \text{ и}$$
(2) $$R\xi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \ldots = \Sigma Px,$$

---

*) Подробная теорія *силъ въ пространствѣ* будетъ помѣщена въ 3 томѣ этого сочиненія.

т. е., что моментъ равнодѣйствующей R относительно какой нибудь оси равенъ суммѣ моментовъ всѣхъ силъ P.

Проведемъ черезъ P_1 и P_2 плоскость E' и соединимъ P_1 и P_2 въ равнодѣйствующую R_{1-2}, тогда по № 14 моментъ силы R_{1-2}



Фиг. 24.

относительно точки B, въ которой плоскость E' пересѣкаетъ ось x равенъ суммѣ моментовъ силъ P_1 и P_2 относительно той же точки. Значитъ, если R_{1-2} пересѣчетъ плоскость E въ точкѣ C, то

$$R_{1-2}\ \overline{CB} = P_1 \overline{A_1 B} + P_2 \overline{A_2 B},$$

а отсюда слѣдуетъ, что

$$R_{1-2}\ \eta_{1-2} = P_1 y_1 + P_2 y_2,$$

гдѣ η_{1-2} означаетъ ординату точки C; получается это на основаніи того, что

$$\eta_{1-2} : y_1 : y_2 = \overline{CB} : \overline{A_1 B} : \overline{A_2 B}.$$

Сложивъ теперь R_{1-2} съ P_3 въ R_{1-3}, потомъ R_{1-3} съ P_4 въ R_{1-4} и т. д., найдемъ

$$R_{1-3}\ \eta_{1-3} = R_{1-2}\ \eta_{1-2} + P_3 y_3 = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3,$$
$$R_{1-4}\ \eta_{1-4} = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и наконецъ получимъ равенство (1) и такимъ же образомъ равенство (2).

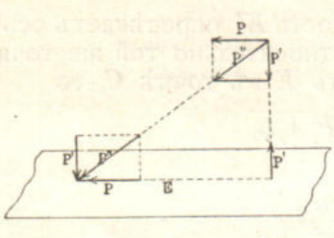
Изъ уравненій (1) и (2) можно получить значенія координатъ точки S:

(3) $$\eta = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P} \text{ и } \xi = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}.$$

Для опредѣленія положенія точки S графическимъ путемъ предположимъ, что силы P дѣйствуютъ въ плоскости E сперва параллельно оси x, а потомъ параллельно оси y, и затѣмъ съ помощью веревочнаго многоугольника находимъ положеніе изъ равнодѣйствующихъ ΣP (по № 8). Точка пересѣченія этихъ равнодѣйствующихъ и будетъ искомой точкой S. При построеніи многоугольника силъ слѣдуетъ обращать вниманіе на знакъ P. Положительныя силы P необходимо наносить въ направленіи положительныхъ координатныхъ осей. Если, напримѣръ, (фиг. 24) плоскость E взята горизонтальною, а направленіе силы тяжести за положительное направленіе, то сила P_5, отложенная въ направленіи $(-x)$ или $(-y)$, будетъ дѣйствовать снизу вверхъ.

19. Сложеніе силъ въ пространствѣ. Для того чтобы сложить силы, произвольно направленныя въ пространствѣ, надо опредѣлить точку пересѣченія A каждой силы P съ произвольно взятой плоскостью E и перемѣстить эту силу по ея направленію въ точку A, гдѣ и разложить ее на двѣ составляющія силы, изъ которыхъ одна будетъ лежать на плоскости E, а другая будетъ перпендикулярна къ ней. Затѣмъ всѣ силы, перпендикулярныя къ E, надо сложить въ одну равнодѣйствующую N (по способу, описанному въ № 18), а всѣ силы, лежащія на плоскости E, въ одну равнодѣйствующую Q (по способу, указанному въ § 1).

Если N и Q пересѣкаются, то ихъ можно сложить въ одну силу R; въ противномъ-же случаѣ ихъ сложить нельзя; такъ какъ положеніе плоскости E было взято произвольно, то данныя силы можно замѣнить двумя другими силами безконечно различными способами.



Фиг. 25.

Положимъ, требуется разложить силу P, параллельную плоскости E, по заданному способу, причемъ мы не будемъ пользоваться безконечно удаленной прямой этой плоскости; прибавимъ двѣ другъ друга уравновѣшивающія силы P', перпендикулярныя къ плоскости E, которыя пересѣкаютъ силу P, затѣмъ сложимъ одну изъ этихъ силъ съ силою P и найдемъ ихъ равнодѣйствующую P''; эту равнодѣйствующую продолжимъ до пересѣченія съ плоскостью E и разложимъ ее потомъ опять на P и P', фиг. 25.

ОТДѢЛЪ II.

Моменты высшихъ степеней параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ одной плоскости. Моменты инерціи и центробѣжные моменты плоскихъ сѣченій.

§ 5.

Моменты высшихъ степеней параллельныхъ силъ.

20. Опредѣленіе моментовъ высшихъ степеней по способу Кульмана. Если P_1, P_2, P_3 . . . . (фиг. 26) будутъ параллельныя силы, лежащія на одной и той-же плоскости (E) и x_1, x_2, x_3 . . . разстоянія между ними и прямой LL, лежащей на той-же плоскости E, то сумму:

$$P_1 x_1^n + P_2 x_2^n + P_3 x_3^n + \ldots\ldots = \Sigma P x^n$$

называютъ *моментомъ $n^{ой}$ степени силъ P относительно оси LL.*

Если $n = 1$, то этотъ моментъ называется также *статическимъ моментомъ* силъ P (см. § 3), а если $n = 2$ — то *моментомъ инерціи*; послѣдній моментъ будемъ обозначать всегда буквою J.

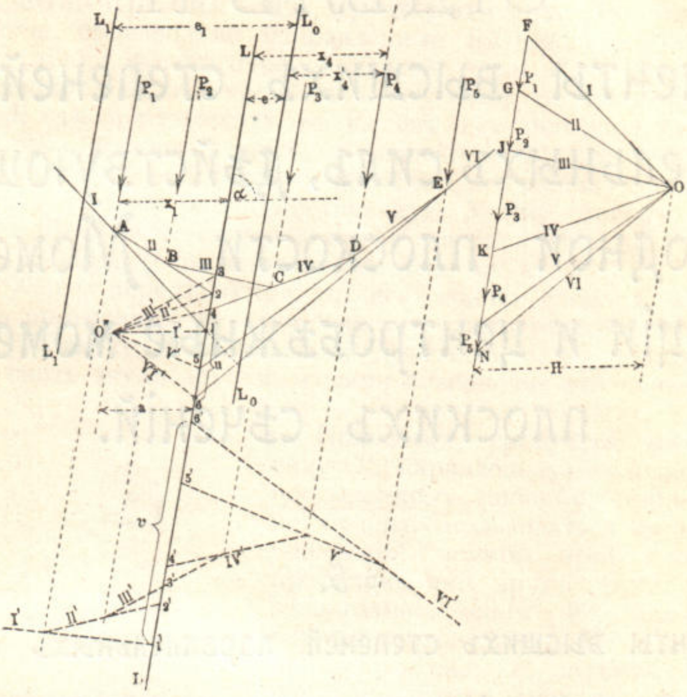
Если для какой нибудь силы P извѣстна величина Px^{n-1}, то найдемъ, что $Px^n = (Px^{n-1})\,x$ равняется моменту первой степени величины Px^{n-1} относительно оси LL; отсюда понятно, что для нахожденія величины ΣPx^n, надо опредѣлить рядъ статическихъ моментовъ:

$$\Sigma Px,\ \Sigma(Px)x,\ \Sigma(Px^2)x\ \ldots\ldots\ \Sigma(Px^{n-1})x.$$

Пусть на фиг. 26 FN — многоугольникъ силъ и ABC . . . . веревочный многоугольникъ, построенный при произвольномъ полюсѣ O и стороны котораго пересѣкаютъ ось LL въ точкахъ 1, 2, 3, 4, 5, 6; тогда треугольники:

$$1A2,\ 2B3,\ 3C4\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

образованные изъ оси LL и двухъ смежныхъ сторонъ веревочнаго



Фиг. 26.

многоугольника, будутъ подобны соотвѣтствующимъ треугольникамъ силъ:

$$FOG,\ GOJ,\ JOK\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

изъ чего слѣдуетъ, что, когда H равняется полюсному разстоянію, измѣренному по направленію x, то

$$x_1 : 12 = H : P_1;\ \ x_2 : 23 = H : P_2 \text{ и т. д.}$$

Отсюда

$$P_1 x_1 = H . \overline{12};\ P_2 x_2 = H . \overline{23} \text{ и т. д.}$$

и затѣмъ:

$$\Sigma P x = H\,(\overline{12} + \overline{23} + \overline{34}\ .\ .\ .\ .\ .\ ),$$

причемъ отдѣльные отрѣзки $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ . . . . . ., надо складывать, принимая во вниманіе ихъ знаки; эти знаки при силахъ, дѣйствующихъ въ одинаковыхъ (положительныхъ) направленіяхъ, будутъ совпадать со знаками соотвѣтствующихъ x.

Если крайнія стороны веревочнаго многоугольника отсѣкаютъ на оси LL отрѣзокъ $\overline{16} = u$, то, не принимая во вниманіе знакъ:

$$\Sigma Px = H \,.\, u.$$

Для фиг. 26, гдѣ $x^{ы}$, лежащіе вправо отъ оси LL, были приняты за положительные, ΣPx будетъ положительная, потому что сумма положительныхъ отрѣзковъ $\overline{34}$, $\overline{45}$, $\overline{56}$, больше суммы отрицательныхъ отрѣзковъ $\overline{12}$, $\overline{23}$.

Если теперь отрѣзки $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ . . . разсматривать, какъ силы, дѣйствующія въ направленіи силъ P_1, P_2, P_3 . . ., и для этихъ силъ построить веревочный многоугольникъ I', II', III' . . при произвольно взятомъ полюсѣ O' стороны котораго пересѣкутъ ось LL въ точкахъ $1'$, $2'$, $3'$ . . . . . ., и если положить второе полюсное разстояніе, параллельное направленію x, равнымъ a, то подобно тому какъ и раньше, получимъ:

$$x_1 : \overline{1'2'} = a : \overline{12}; \; x_2 : \overline{2'3'} = a : \overline{23}; \text{ и т. д.}$$

$$\text{откуда } P_1 x_1^{\,2} = H a\,(\overline{1'2'}); \; P_2 x_2^{\,2} = H a\,(\overline{2'3'}) \text{ и т. д.,}$$

$$\text{причемъ } \left(\overline{12} = \frac{P_1 x_1}{H}; \; \overline{23} = \frac{P_2 x_2}{H}; \; \ldots\ldots\right);$$

наконецъ получимъ:

$$J = \Sigma\, Px^2 = H a\,(\overline{1'2'} + \overline{2'3'} + \overline{3'4'} + \ldots\ldots) = H.a.v,$$

гдѣ v обозначаетъ отрѣзокъ, отсѣкаемый на оси LL крайними сторонами втораго веревочнаго многоугольника, считаемый всегда положительнымъ, если только всѣ силы будутъ дѣйствовать въ положительномъ направленіи. Когда H измѣряется по масштабу силъ, то a и v представляютъ изъ себя линейныя величины.

Теперь уже легко опредѣлить моментъ какой угодно степени. Положимъ, требуется опредѣлить $\Sigma\, Px^3$; примемъ отрѣзки $\overline{1'2'}$, $\overline{2'3'}$, $\overline{3'4'}$ . . . (обращая вниманіе на ихъ знаки) за величины параллельныхъ силъ, замѣняющихъ данныя силы P, построимъ для нихъ веревочный многоугольникъ при произвольномъ полюсномъ разстояніи b, и опредѣлимъ отрѣзокъ w, отсѣкаемый на оси LL крайними сторонами многоугольника; тогда найдемъ (не обращая вниманія на знакъ):

$$\Sigma Px^3 = H.a.b.w.$$

Чтобы найти ΣPx^n, надо начертить n веревочныхъ многоугольниковъ. Всѣ полюсныя разстоянія надо измѣрять въ направленіи x.

21. Опредѣленіе J по способу Мора. Кромѣ статическихъ моментовъ статика сооруженій имѣетъ еще дѣло главнымъ образомъ съ моментами инерціи. Опредѣленіе послѣднихъ производится также съ помощью перваго веревочнаго многоугольника (I, II, III . . . . .) (фиг. 26).

Площадь $\mathfrak{F}$, заключающаяся между этимъ многоугольникомъ, крайними его сторонами (I и VI) и осью LL, т. е. площадь (1 A B C D E c 1), будетъ равна

$$\mathfrak{F} = \Delta\, 1\, A\, 2 + \Delta\, 2\, B\, 3 + \Delta\, 3\, C\, 4 + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Sin}\alpha\,(x_1\,\overline{12} + x_2\,\overline{23} + x_3\,\overline{34} + \ldots\ldots)$$

$$= \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{2H}(P_1 x_1{}^2 + P_2 x_2{}^2 + P_3 x_3{}^2 + \ldots) = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{2H}\Sigma P x^2,$$

гдѣ α обозначаетъ уголъ, образуемый направленіемъ линій P и x; отсюда получимъ:

(1) $$J = Px^2 = \frac{2\,\mathfrak{F}\,H}{\operatorname{Sin}\alpha}.$$

22. Зависимость между двумя моментами инерціи относительно двухъ параллельныхъ между собой осей. Если силы P_1, P_2, P_3 . . . (фиг. 26) находятся на разстояніяхъ $x_1{}'$, $x_2{}'$, $x_3{}'$ . . . . . отъ оси L_0L_0, которая совпадаетъ съ ихъ равнодѣйствующей ΣP, проходящей черезъ точку пересѣченія крайнихъ сторонъ I и VI веревочнаго многоугольника, то моментъ инерціи относительно оси L_0L_0 будетъ

$$J_0 = \Sigma P x'^2,$$

а статическій моментъ относительно оси L_0L_0:

$$\Sigma P x' = 0.$$

Обозначимъ буквой e разстояніе между осями LL и L_0L_0 и положимъ $x = x' + e$, тогда получимъ

$$J = \Sigma P x^2 = \Sigma P(x' + e)^2 = \Sigma P x'^2 + 2e\ \Sigma P x' + e^2 \Sigma P,$$

откуда слѣдуетъ:

(2) $$J = J_0 + e^2\ \Sigma P.$$

Точно также получимъ, что для оси L_1L_1, параллельной L_0L_0, разстояніе между которыми равняется e_1:

$$J_1 = J_0 + e_1^2 \Sigma P,$$

откуда вытекаетъ слѣдующая зависимость:

(3) $$J_1 - J = (e_1^2 - e^2)\ \Sigma P.$$

§ 6.

Моменты инерціи плоскихъ сѣченій.

23. Опредѣленія. Теорія моментовъ второй степени находитъ себѣ примѣненіе при изслѣдованіи сопротивленій изгибаемыхъ прямыхъ брусьевъ. Если отнести поперечное сѣченіе такого бруса къ координатнымъ осямъ x,y (обыкновенно прямоугольнымъ) (фиг. 37) и обозначить безконечно малый элементъ площади такого сѣченія черезъ dF, то интегралы, распространенные на всю площадь:

$$J_x = \int y^2 dF; \quad J_y = \int x^2 dF; \quad Z_{xy} = \int xy dF$$

называются моментами второй степени поперечнаго сѣченія:

J_x называется *моментомъ инерціи* относительно оси x
J_y " " " " " y
Z_{xy} " *центробѣжнымъ моментомъ.*

Напряженія при изгибѣ прямыхъ брусьевъ могутъ быть выражены въ видѣ функцій трехъ интеграловъ J_x, J_y, Z_{xy}, поэтому болѣе подробное изученіе этихъ величинъ имѣетъ въ статикѣ сооруженій большое значеніе. Сперва займемся опредѣленіемъ моментовъ инерціи.

24. Опредѣленіе момента инерціи неправильныхъ фигуръ по способу Кульмана. Моментъ инерціи $J_x = \int y^2 dF$ не зависитъ отъ абсциссъ x элементовъ поперечнаго сѣченія, а потому подъ выраженіемъ dF можно подразумѣвать площадь безконечно узкой полоски, параллельной оси x (см. фиг. 31 и 32).

При графическомъ опредѣленіи J приходится замѣнять эти безконечно узкія полоски полосками конечной ширины (фиг. 27). Пусть F_1, F_2, F_3, . . . , будутъ ихъ площади и y_1, y_2, y_3, ... разстоянія ихъ центровъ тяжести отъ оси x; тогда найдемъ съ извѣстнымъ приближеніемъ:

$$J_x = F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + F_3 y_3^2 + \ldots\ldots = \Sigma F y^2.$$

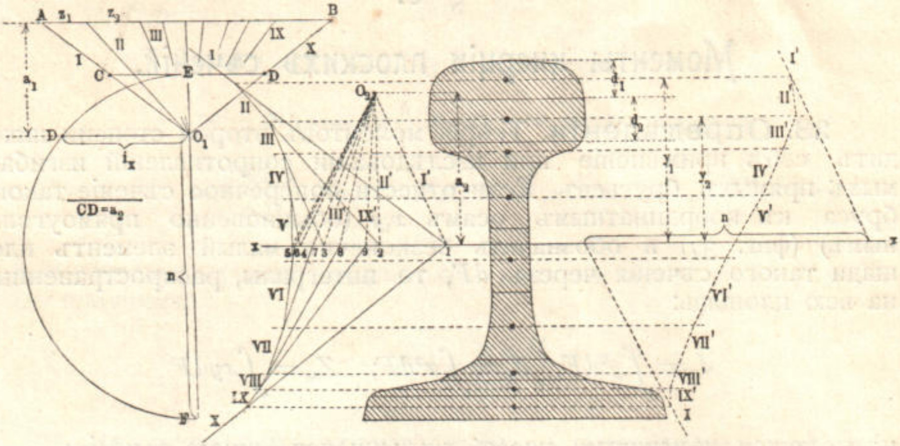
Если всѣ полоски, въ большинствѣ случаевъ разной ширины d_1, d_2, d_3, . . . , превратить въ прямоугольники съ одинаковымъ основаніемъ a и съ высотами z_1, z_2, z_3, . . . , то найдемъ:

$$F_1 = az_1; \; F_2 = az_2; \; F_3 = az_3 \ldots\ldots$$

а также

$$J_x = a \Sigma y^2 z$$

Примемъ теперь высоты z за силы, приложенныя къ центрамъ тяжести полосокъ и дѣйствующія параллельно оси x, и опредѣлимъ по способу, указанному въ № 20, моментъ второй степени этихъ



Фиг. 27.

силъ относительно оси x, (на фиг. 27 эта ось проходитъ черезъ центръ тяжести поперечнаго сѣченія); обозначимъ буквами:

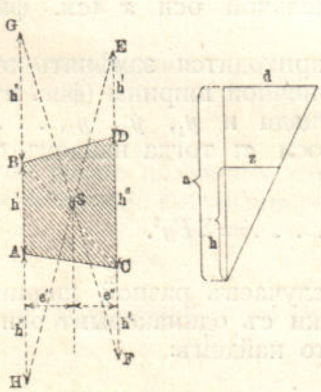
a_1 — полюсное разстояніе перваго веревочн. многоугольн. $(I, II \ldots)$
a_2 — „ „ втораго „ „ $(I', II' \ldots)$
n — отрѣзокъ, отсѣченный на оси x крайними сторонами веревочнаго многоугольника, тогда получимъ:

$$\Sigma y^2 z = a_1\, a_2\, n$$

и затѣмъ:

$$J_x = a\, a_1\, a_2\, n$$

отрѣзки a, a_1, a_2, n, надо измѣрять по линейному масштабу. Для a, a_1, a_2, надо выбирать величины, выражающіяся въ цѣлыхъ числахъ



Фиг. 28 и 29.

Отдѣльныя полоски, на которыя разбито данное сѣченіе, можно принять за трапеціи. Если средняя высота трапеціи $= h$, ширина $= d$, то величина ея площади $F = hd$, а изъ равенства $F = az$ получимъ:

$$z = \frac{hd}{a}.$$

Эту величину можно опредѣлить графически (фиг. 29). Для опредѣленія центра тяжести S (фиг. 28) откладываемъ на продолженіяхъ параллельныхъ сторонъ h', h'' отрѣзки:

$$\overline{DE} = \overline{CF} = \overline{AB} = h'$$
$$\overline{BG} = \overline{AH} = \overline{CD} = h''$$

и соединяемъ G съ F и E съ H прямыми линіями. которыя пересѣкутся въ точкѣ S. Разобьемъ трапецію на два треугольника, площади которыхъ $\frac{h'd}{2}$ и $\frac{h''d}{2}$, тогда статическій моментъ трапеціи относительно стороны h' будетъ:

$$M = \frac{h'd}{2}\frac{d}{3} + \frac{h''d}{2}\frac{2d}{3} = \frac{h' + 2h''}{6}d^2;$$

но съ другой стороны мы получимъ

$$M = \frac{h' + h''}{2}de',$$

гдѣ e' есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ S на h'

Отсюда выводимъ

$$\frac{e'}{d} = \frac{h' + 2h''}{3(h' + h'')}, \text{ а также } \frac{e''}{d} = \frac{h'' + 2h'}{3(h' + h'')}$$

и окончательно

$$\frac{e'}{e''} = \frac{h' + 2h''}{h'' + 2h'},$$

а это равенство удовлетворяетъ найденному на фиг. 28 положенію точки S.

25. Радіусъ инерціи. Если написать равенство

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F},$$

гдѣ F — величина площади поперечнаго сѣченія, то линейную величину i_x называютъ *радіусомъ инерціи* поперечнаго сѣченія относительно оси x. Если представить J_x (по способу, выведенному въ № 24) въ формѣ aa_1a_2n и положить $F = a\,\Sigma\,z$, то получимъ

$$i_x^2 = \frac{a_1\,a_2\,n}{\Sigma\,z}.$$

Для опредѣленія этой величины отложимъ между внѣшними лучами I и II перваго многоугольника силъ отрѣзокъ $CD = a_2$, параллельный линіи $AB = \Sigma\,x$ (фиг. 27), проведемъ $EO_1F \perp CD$, отложимъ $O_1F = n$ и въ точкѣ O_1 возставимъ перпендикуляръ, который пересѣчетъ въ точкѣ D окружность, построенную на EF, какъ на діаметрѣ.

Тогда получимъ

$$\overline{O_1E} = a_1\,\frac{a_2}{\Sigma\,z},$$

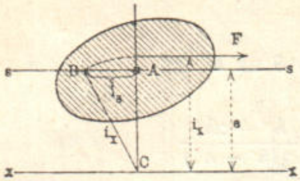
$$\overline{O_1D}^2 = \overline{O_1E}\,.\,\overline{O_1F} = \frac{a_1\,a_2\,n}{\Sigma z} \text{ и}$$

наконецъ: $\overline{O_1D} = i_x$ *).

---

*) Если опредѣляется только i_x (не J_x), то принимаютъ $a_1 = \frac{1}{2}\Sigma z$. Тогда $i = \sqrt{\frac{a_2}{2}n}$ получится, какъ средняя пропорціональная къ $\frac{1}{2}a_2$ и n.

26. Опредѣленіе момента инерціи такого сѣченія, которое состоитъ изъ частей съ извѣстными радіусами инерціи. Пусть на фиг. 30: ss ось, проходящая черезъ центръ тяжести сѣченія, площадь котораго F; xx — ось, проведенная параллельно ss на разстояніи e и J_x — моментъ инерціи сѣченія относительно оси ss. Тогда относительно оси xx будемъ имѣть (по уравн. 2, № 22):



Фиг. 30.

$$(1) \qquad J_x = J_s + Fe^2,$$

а подставивъ $J_s = F i_s^2$, получимъ

$$J_x = F\,(i_s^2 + e^2).$$

Отложимъ на прямой ss отъ какой нибудь точки A отрѣзокъ $AB = i_s$, проведемъ $AC \perp xx$ и соединимъ точки C и B прямою, которая опредѣлитъ величину

$$(2) \qquad i_x = \sqrt{i_s^2 + e^2};$$

кромѣ того получимъ

$$J_x = F i_x^2.$$

Поэтому на величину J_x можно смотрѣть, какъ на моментъ втораго порядка относительно оси xx той силы F, которая дѣйствуетъ параллельно xx на разстояніи отъ нея $= i_x$.

i_x будетъ радіусомъ инерціи сѣченія относительно оси xx.

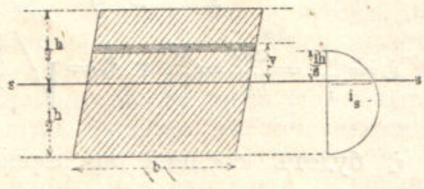
Если удастся разбить сѣченіе F на такія части, радіусы инерціи которыхъ i_s извѣстны, то мы будемъ въ состояніи найти радіусъ инерціи i_x всего сѣченія; величину J_x получимъ тогда въ формѣ:

$$J_x = \Sigma F i_x^2.$$

Желая устранить ошибки, которыя получаются при опредѣленіи J_x (фиг. 27), когда сѣченіе разбивается на полоски конечной ширины, мы должны разстоянія y_1, y_2, . . . центровъ тяжести отдѣльныхъ полосокъ замѣнить радіусами инерціи i_x, взятыми относительно оси xx (это бываетъ необходимымъ только при полоскахъ относительно широкихъ).

Фигуры, ограниченныя прямыми линіями, можно всегда разбить на пораллелограммы и треугольники, одна изъ сторонъ которыхъ будетъ параллельна той оси, относительно которой берутся радіусы инерціи; криволинейныя же фигуры можно замѣнить всегда съ достаточною точностью прямолинейными. Поэтому достаточно опредѣлить радіусъ инерціи i_s для параллелограмма и треугольника относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести параллельно одной изъ сторонъ.

a. Параллелограммъ. Пусть b — основанiе, h — высота (фиг. 31); относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести параллельно сторонѣ b, получимъ:



Фиг. 31.

$$J_s = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y^2 dF = 2\int_0^{\frac{1}{2}h} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}{}^{*)} \text{ и}$$

$$i_s^2 = \frac{J_s}{F} = \frac{J_s}{bh} = \frac{h^2}{12}, \text{ откуда } i_s = \sqrt{\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{6}}.$$

Слѣдовательно, величина i_s будетъ средней пропорцiональной между $\frac{h}{2}$ и $\frac{h}{6}$; ее можно найти по извѣстному правилу графически, фиг. 31, построивъ на отрѣзкѣ $\frac{h}{2}+\frac{h}{6}$, какъ на дiаметрѣ, окружность.

b. Треугольникъ, фиг. 32. Сначала найдемъ моментъ инерцiи относительно оси, проходящей черезъ вершину и параллельной основанiю b:

$$J = \int_0^h y^2 d\,F = \int_0^h y^2\,\frac{by}{h}\,dy = \frac{bh^3}{4},$$

а отсюда, при помощи уравн. 2, № 22, найдемъ моментъ инерцiи

*) Относительно оси, совпадающей съ b, получимъ $J = \frac{bh^3}{3}$.

относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести и параллельной сторонѣ b:

$$J_s = J - F\left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2}\frac{4h^2}{9} = \frac{bh^3}{36};$$

$$\text{поэтому:}\quad i_s = \frac{J_s}{F} = \frac{2J_s}{bh} = \frac{h^2}{18} \text{ и } i_s = \sqrt{\frac{h}{3}\cdot\frac{h}{6}}.$$

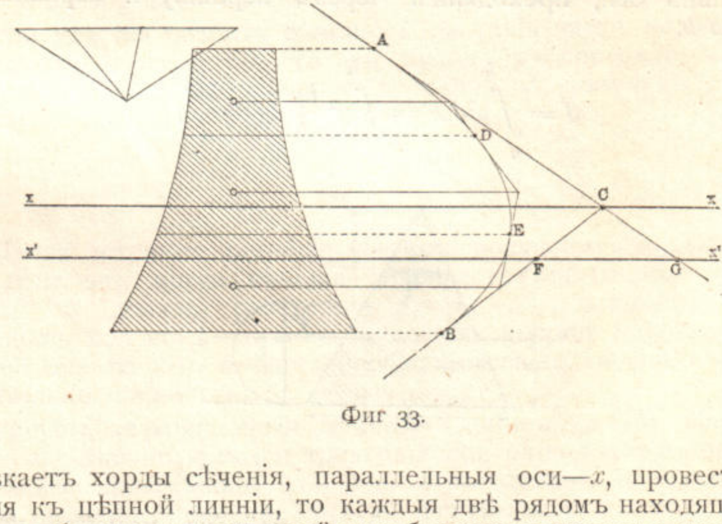
Слѣдовательно i_s будетъ средней пропорціональной между $\frac{h}{3}$ и $\frac{h}{6}$.

Эти результаты могутъ быть примѣнены главнымъ образомъ къ опредѣленію моментовъ инерціи *фигуръ, ограниченныхъ прямыми линіями.*

27. Способъ Мора. Для нахожденія момента инерціи J относительно оси xx сѣченія, изображеннаго на фиг. 27, помощью веревочнаго многоугольника (I, II, III . . .), опредѣляемъ величину площади $\mathfrak{F}$, образуемой веревочнымъ многоугольникомъ и двумя внѣшними боками его. Тогда получимъ (по № 21):

$$\Sigma z y^2 = 2\,\mathfrak{F} a_1 \text{ *) и приблизительно } J = \Sigma a z y^2 = 2 a a_1 \mathfrak{F}.$$

Чѣмъ меньше ширина полосокъ, тѣмъ точнѣе опредѣленіе J. При безконечно узкихъ полоскахъ веревочный многоугольникъ обращается въ кривую линію—*цѣпную линію*, которая касается боковъ вычерченнаго веревочнаго многоугольника въ точкахъ пересѣченія его съ линіями раздѣла сѣченія на полоски. Потому что, если въ точкахъ A, D, E, B (фиг. 33), въ которыхъ цѣпная линія



Фиг 33.

пересѣкаетъ хорды сѣченія, параллельныя оси—x, провести касательныя къ цѣпной линніи, то каждыя двѣ рядомъ находящіяся касательныя будутъ служить крайними боками веревочнаго многоугольника для полосокъ сѣченія, лежащихъ между ихъ точками касанія; по-

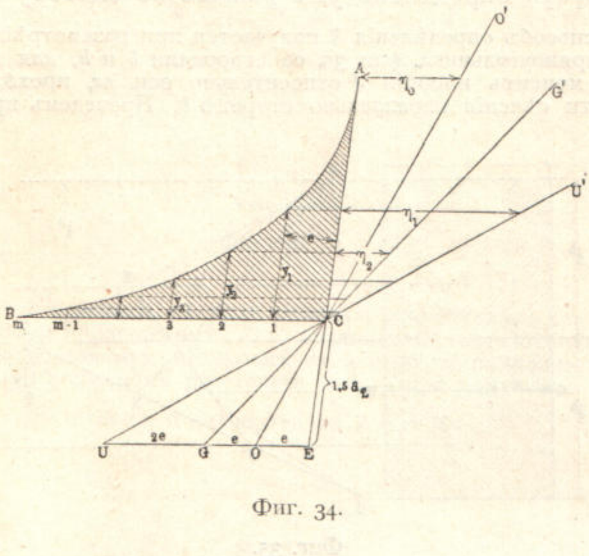
*) Въ уравн. (1), стр. 32, надо положить $\alpha = 90^0$ и $H = a_1$.

этому эти касательныя должны пересѣкаться на линіи, параллельной оси—x и проходящей черезъ центръ тяжести каждой полоски, и образовать веревочный многоугольникъ, описанный около цѣпной линіи.

Въ большинствѣ случаевъ незначительное число касательныхъ и точекъ касанія даётъ возможность построить достаточно точно цѣпную линію; такъ что ширина полосокъ, на которыя разбивается сѣченіе, при примѣненіи способа Мора можетъ быть крупнѣе, чѣмъ при примѣненіи способа Кульмана. Ошибки, могущія быть при опредѣленіи J по способу Мора, когда ширина полосокъ берется крупной, легко замѣтны; ошибки увеличиваются съ увеличеніемъ площади между веревочнымъ многоугольникомъ и цѣпною линіей.

Величину площади $\mathfrak{F}$, входящей въ уравненіе $J = 2aa_1\,\mathfrak{F}$, проще всего опредѣлить по правилу Симпсона. Для этой цѣли разбиваютъ площадь ABC (фиг. 34), заключенную между цѣпной линіей AB и ея крайними касательными AC и BC, на четное число (m) равныхъ по ширинѣ полосокъ; линіи раздѣла проводятъ параллельно одной изъ касательныхъ (напр. AC); обозначимъ длину этихъ линій черезъ y_1, y_2, y_3 . . . Ширину полосокъ (по перпендикуляру къ ординатамъ y) обозначимъ буквой e, а длину $\overline{AC}$ черезъ y_0, тогда получимъ:

$$\mathfrak{F} = \frac{e}{3}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \,.\,.\,.\,.\,.\, + 4y_{m-1}).$$



Фиг. 34.

Затѣмъ найдемъ (подобно тому, какъ это было сдѣлано въ № 24, стр. 34):

$$J = aa_1\,a_2\,n, \text{ гдѣ}$$

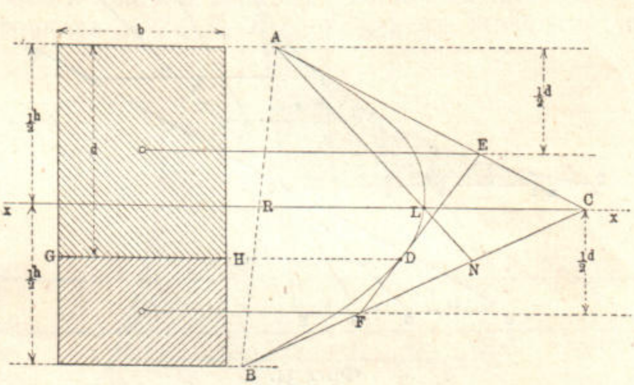
$$n = \frac{e}{1{,}5a_2}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \,.\,.\,.\,.\,.\, + 4y_{m-1}).$$

Для опредѣленія отрѣзка n чертежемъ продолжимъ AC отъ C внизъ и отложимъ $\overline{CE} = 1{,}5a_2$ (гдѣ a_2 можетъ быть выбрано произвольнымъ); черезъ E проводимъ прямую, параллельную CB, откладываемъ на ней $\overline{EO} = e$, $\overline{EG} = 2e$, $\overline{EU} = 4e$ и наконецъ проводимъ прямыя OCO', GCG', UCU'. Конечныя точки ординатъ $y_1, y_3, \ldots$ y_{m-1} съ нечетнымъ указателемъ и прямыя CA и UU' дадутъ отрѣзки: $\eta_1 = \frac{4e}{1,5a_2} y_1; \eta_3 = \frac{4e}{1,5a_2} y_3; \ldots$; затѣмъ ординаты съ четнымъ указателемъ и прямая GG' дадутъ отрѣзки: $\eta_2 = \frac{2e}{1,5a_2} y_2$; $\eta_4 = \frac{e}{1,5a_2} y_4; \ldots$; наконецъ, съ помощью прямой OO' найдемъ отрѣзокъ $\eta_0 = \frac{e}{1,5a_2} y_0$. Теперь остается сложить (при помощи циркуля) всѣ отрѣзки η; тогда получимъ:

$$n = \Sigma \eta.$$

Если требуется опредѣлить моментъ инерціи J' сѣченія относительно оси $x'x'$, параллельной оси xx (фиг. 33), то къ вышеопредѣленной площади $\mathfrak{F}$ надо прибавить площадь треугольника CFG, ограниченнаго осью $x'x'$ и крайними касательными къ цѣпной линіи. Обративъ этотъ треугольникъ въ другой, ему равновеликій, основаніе котораго $= a_2$, а высота h, получимъ выраженіе: $J' = aa_1 a_2 (h + n)$. Этотъ способъ опредѣленія J' рекомендуется также тогда, когда $J = aa_1 a_2 n$ опредѣлено уже раньше по способу Кульмана.

Другой способъ опредѣленія $\mathfrak{F}$ получается при разсмотрѣніи цѣпной линіи ALB для прямоугольника, фиг. 35, со сторонами b и h, для котораго требуется найти моментъ инерціи J относительно оси xx, проходящей черезъ центръ тяжести сѣченія параллельно сторонѣ b. Проведемъ прямую GH па-



Фиг. 35.

раллельно xx до пересѣченія съ цѣпной линіей въ точкѣ D и затѣмъ въ точкѣ D построимъ касательную, пересѣкающую крайніе бока веревочнаго многоугольника AC и BC въ точкахъ E и F. Точки E и F должны лежать на линіяхъ, параллельныхъ оси xx и проходящихъ черезъ центры тяжести обѣихъ частей прямоугольника, раздѣленнаго линіей GH. Поэтому получимъ, фиг. 35:

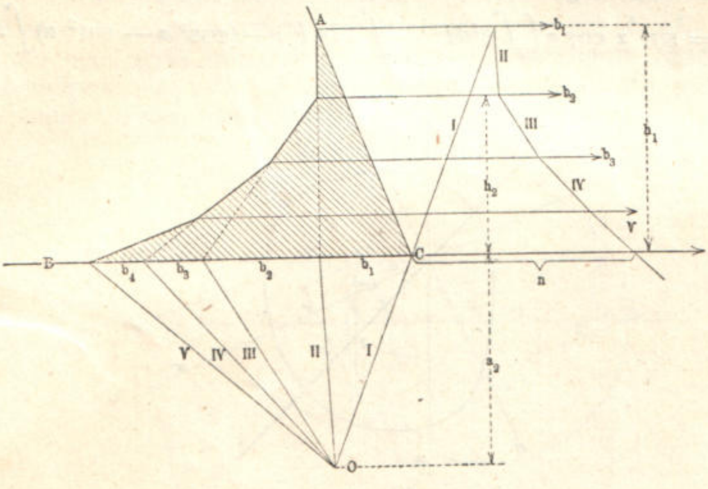
$$\overline{AE} : \overline{AC} = \frac{1}{2} d : \frac{1}{2} h = \overline{CF} : \overline{CB},$$

а отсюда слѣдуетъ, по извѣстному геометрическому закону, что цѣпная линія ALB будетъ параболой, дѣлящей отрѣзокъ RC въ точкѣ L пополамъ. Величина площади, заключенной между параболой ALB и прямыми AC и CB равняется $\frac{1}{6} h \overline{RC} = \frac{1}{3} \Delta \overline{ABC}$; поэтому, отложивъ $\overline{CN} = \frac{1}{3} \overline{CB}$ и проведя прямую AN, получимъ:

$$\text{параболическій треугольникъ } ALBCA = \Delta ANC.$$

При опредѣленіи значенія $\mathfrak{F}$ для произвольнаго сѣченія можно съ достаточной точностью принять всѣ части площади между цѣпной линіей и веревочнымъ многоугольникомъ за параболическіе треугольники и обратить ихъ въ равновеликіе имъ прямолинейные треугольники. Тогда задача объ опредѣленіи $\mathfrak{F}$ сводится къ слѣдующей: найти величину такой площади $\mathfrak{F}$, которая, какъ показано на фиг. 36, ограничена прямыми линіями. Разобьемъ эту площадь на рядъ треугольниковъ съ основаніями b_1, b_2 b_3 . . . и высотами h_1, h_2, h_3, . . . , и тогда найдемъ:

$$2\mathfrak{F} = b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3 + \ldots\ldots = \Sigma bh;$$



Фиг. 36.

затѣмъ $2\mathfrak{F}$ можно представить въ видѣ момента, относительно оси BC, силъ b, параллельныхъ BC и приложенныхъ къ вершинамъ соотвѣтствующихъ треугольниковъ. Этотъ моментъ построенъ на фиг. 36 съ помощью веревочнаго многоугольника при полюсномъ разстояніи $= a_2$. Тогда получимъ:

$$2\mathfrak{F} = a_2 n \text{ и окончательно } J = aa_1a_2n.$$

---

§ 7.

Общіе законы для моментовъ сѣченій втораго порядка. Опредѣленіе центробѣжнаго момента.

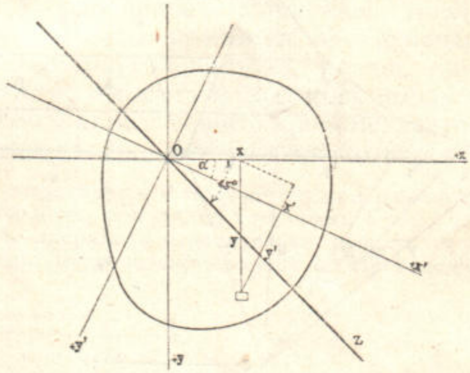
28. Зависимость между моментами инерціи сѣченій относительно осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку. Повернемъ прямоугольныя координатныя оси (x,y), къ которымъ отнесено данное сѣченіе (фиг. 37), на уголъ α

въ положеніе x', y'; новыя координаты выразятся по отношенію къ старымъ слѣдующими равенствами:

$$y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$
$$x' = y\sin\alpha + x\cos\alpha,$$

а для моментовъ инерціи сѣченія: $J_{x'} = \int y'^2 dF$; $J_{y'} = \int x'^2 dF$; $Z_{x'y'} = \int x'y' dF$ относительно новой системы координатныхъ осей $x'y'$ получимъ выраженія:

$$J_{x'} = \cos^2\alpha \int y^2 dF + \sin^2\alpha \int x^2 dF - 2\sin\alpha \operatorname{sos}\alpha \int xy dF,$$
$$J_{y'} = \sin^2\alpha \int y^2 dF + \cos^2\alpha \int x^2 dF + 2\sin\alpha\cos\alpha \int xy dF,$$
$$Z_{x'y'} = \sin\alpha\cos\alpha\left(\int y^2 dF - \int x^2 dF\right) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\int xy dF$$



Фиг. 37.

Такимъ образомъ между значеніями

$$J_x = \int y^2 dF;\ J_y = \int x^2 dF;\ Z_{xy} = \int xy dF,$$

взятыми относительно осей x, y, и значеніями $J_{x'}$ $J_{y'}$, $Z_{x'y'}$ существуетъ зависимость такого рода:

$$(1) \quad \begin{cases} J_{x'} = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - Z_{xy}\sin 2\alpha, \\ J_{y'} = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha + Z_{xy}\sin 2\alpha, \\ Z_{x'y'} = \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha + Z_{xy}\cos 2\alpha \end{cases}$$

Сложивъ два первыхъ уравненія, получимъ важное равенство:

$$(2) \qquad J_x' + J_y' = J_x + J_y,$$

на основаніи котораго заключаемъ, что сумма моментовъ инерціи, взятыхъ относительно какихъ либо прямоугольныхъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, будетъ постоянна.

Изъ перваго уравненія (1) можно получить слѣдующее выраженіе для момента инерціи относительно оси z, наклоненной къ оси x подъ угломъ въ 45^0, фиг. 37:

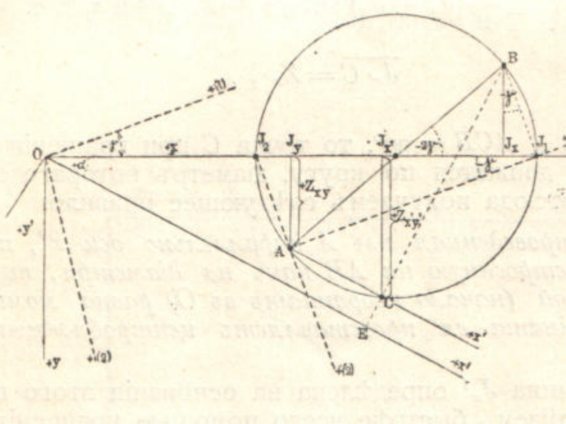
$$J_z = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - Z_{xy},$$

а отсюда уже получается формула

$$Z_{xy} = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - J_z, \tag{3}$$

помощью которой опредѣленіе центробѣжнаго момента сводится къ опредѣленію моментовъ инерціи относительно каждой изъ осей.

Теперь предположимъ, что моменты инерціи J_x, J_y, Z_{xy} относительно осей (x,y) даны, и постараемся опредѣлить графически моменты инерціи $J_{x'}$, $J_{y'}$, $Z_{x'y'}$ относительно осей (x',y'), проходящихъ черезъ тоже начало.



Фиг. 38.

Изображая моменты J и Z прямыми линіями, отложимъ по оси x отрѣзки:

$\overline{OI_x} = J_x$ и $\overline{OI_y} = J_y$ (фиг. 38), причемъ за ось $x^{ово}$ выберемъ ту ось которой соотвѣтствуетъ наибольшій моментъ инерціи. Затѣмъ въ точкѣ J_y, въ сторону положительныхъ y, возставимъ перпендикуляръ $\overline{J_yA} = + Z_{xy}$ и въ точкѣ J_x, въ сторону отрицательныхъ y, возставимъ перпендикуляръ такой же длины $\overline{J_xB} = Z_{xy}$ *). Если опус-

---

*) Если Z отрицательно, то точка A лежитъ выше, а точка B ниже оси x. Если для опредѣленія Z_{xy} воспользоваться уравн. (3) и найти моменты инерціи относительно осей x, y, z по § 6, т. е. представить ихъ въ формѣ: $J_x = aa_1a_2n_x$, $J_y = aa_1a_2n_y$, $J_z = aa_1a_2n_z$, то масштабъ для поперечнаго сѣченія надо выбрать такъ, чтобы величина J_z изобразилась отрѣзкомъ прямой линіи, равнымъ n_z. Тогда надо сдѣлать: $\overline{OJ_x} = n_x$; $\overline{OJ_y} = n_y$ и $\overline{J_yA} = \overline{J_xB} = \frac{1}{2}(n_x + n_y) - n_z$.

тить потомъ изъ B перпендикуляръ BE на ось x' и провести $AC \perp BE$ и $CJ_{x'}$ перпендикулярно къ оси x, то получимъ:

$$\text{отрѣзокъ } \overline{OJ_{x'}} = \overline{OE}\cos\alpha + \overline{EC}\sin\alpha$$
$$\overline{OE} = J_y\cos\alpha - Z_{xy}\sin\alpha,$$
$$\overline{EC} = J_y\sin\alpha - Z_{xy}\cos\alpha, \text{ слѣдовательно}$$
$$\overline{OJ_{x'}} = (J_x\cos\alpha = Z_{xy}\sin\alpha)\cos\alpha + (J_y\sin\alpha - Z_{xy}\cos\alpha)\sin\alpha$$
$$= J_x\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - Z_{xy}\sin 2\alpha$$

а отсюда слѣдуетъ, что:

$$\overline{OJ_{x'}} = J_{x'}.$$

Затѣмъ находимъ:

$$\text{отрѣзокъ } \overline{J_{x'}C} = \overline{OC}\sin\alpha - \overline{EC}\cos\alpha$$

и послѣ легкаго преобразованія:

$$\overline{J_{x'}C} = \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha + Z_{xy}\cos 2\alpha, \text{ т. е.}$$

$$\overline{J_{x'}C} = Z_{x'y'}.$$

Такъ какъ $\angle ACB = 90^0$, то точка C при вращеніи оси x' вокругъ точки O движется по кругу, діаметръ котораго есть данная прямая AB, а отсюда получаемъ слѣдующее правило:

Прямая, проведенная изъ A параллельно оси x', пересѣкаетъ окружность, построенную на AB какъ на діаметрѣ, въ точкѣ C, абсцисса которой (начало координатъ въ O) равна моменту инерціи $J_{x'}$, а ордината ея представляетъ центробѣжный моментъ $Z_{x'y'}$.

Если величина J_x' опредѣлена на основаніи этого правила, то величину J_y' найдемъ быстрѣе всего помощью уравненія (2).

29. Главные моменты инерціи и главныя оси инерціи. Окружность, построенная на AB какъ на діаметрѣ, (фиг. 38) пересѣкаетъ ось x въ двухъ точкахъ J_1 и J_2; отсюда выводимъ заключеніе, что наибольшое значеніе, какое можетъ принять $J_{x'}$, есть:

$$J_1 = \overline{OJ_1};$$

оно соотвѣтствуетъ оси (1), проходящей черезъ центръ тяжести O параллельно прямой AJ_1; наименьшее же значеніе

$$J_2 = \overline{OJ_2}$$

соотвѣтствуетъ оси (2), проходящей черезъ O параллельно прямой J_2A.

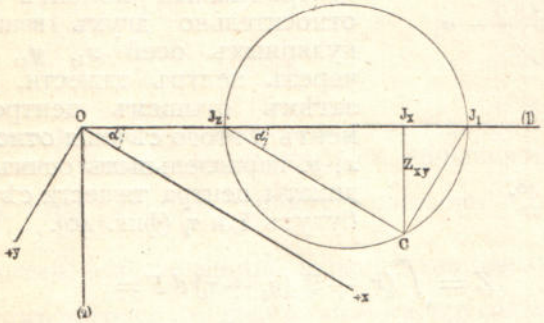
J_1 и J_2 называются *главными моментами инерціи*, а оси (1) и (2), относительно которыхъ взяты эти моменты, называются *глав-*

ными осями инерціи; непосредственно изъ фиг. 38 можно вывести слѣдующій законъ:

Каждой точкѣ O въ плоскости сѣченія соотвѣтствуютъ двѣ взаимно перпендикулярныя главныя оси, относительно которыхъ центробѣжный моментъ равняется нулю.

Если одна изъ координатныхъ осей x, y раздѣляетъ сѣченіе на двѣ симметричныхъ половины, то для каждаго элемента площади dF одной половины будетъ соотвѣтствовать элементъ площади въ другой половинѣ, причемъ для обоихъ элементовъ произведенія $xydF$ будутъ равны, но противоположны по знаку. Интегралъ $\int xydF$ можно будетъ тогда разложить на двѣ части, равныя по величинѣ, но противоположныя по знаку, а это значитъ, что $\int xydF = 0$; отсюда заключаемъ, что *каждая ось симметріи есть главная ось инерціи.*

Если сѣченіе имѣетъ одну ось симметріи, то ее прямо и относятъ къ главнымъ осямъ инерціи. Для нахожденія затѣмъ моментовъ инерціи J_x, J_y, Z_{xy} относительно двухъ другихъ взаимно перпендикулярныхъ осей x, y, проходящихъ чрезъ то же начало O, откладываютъ на оси (1) въ какомъ либо масштабѣ отрѣзки $\overline{OJ_1} = J_1$



Фиг. 39.

и $\overline{OJ_2} = J_2$ и проводятъ прямыя J_2C и J_1C (фиг. 39) параллельно осямъ x и y. Абсцисса точки C будетъ тогда $= J_x$, а ордината C будетъ $= Z_{xy}$. Точка C лежитъ на окружности, діаметръ которой $= J_1 - J_2$. Описанное построеніе есть только частный случай построенія, сдѣланнаго на фиг. 39. Если J_x извѣстно, то J_y находится скорѣе всего по уравненію: $J_y + J_x = J_1 + J_2$.

30. Формула для опредѣленія главныхъ моментовъ инерціи, когда величины J_x, J_y, Z_{xy} заданы. Уголъ γ (на фиг. 38 отрицателенъ), образуемый главной осью (1) съ осью x той системы координатныхъ осей, относительно которыхъ моменты инерціи J_x, J_y, Z_{xy} извѣстны, опредѣлится уравненіемъ:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2 Z_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Это уравненіе получимъ изъ послѣдняго уравненія (1), подставивъ туда $Z_{x'y'} = 0$ но его можно получить непосредственно изъ фиг. 38.

Для главныхъ моментовъ инерціи J_1 и J_2 изъ фиг. 38 находимъ выраженія:

$$J_1 = J_x - Z_{xy}\,\mathrm{tg}\,\gamma\,{}^{*)};\ J_2 = J_y + Z_{xy}\,\mathrm{tg}\,\gamma$$

потому что отрѣзокъ $\overline{J_x J_1} = \overline{J_2 J_y} = -Z_{xy}\,\mathrm{tg}\,\gamma$.

Если главные моменты инерціи будутъ извѣстны, то моменты инерціи относительно осей x, y (фиг. 39) будутъ равняться:

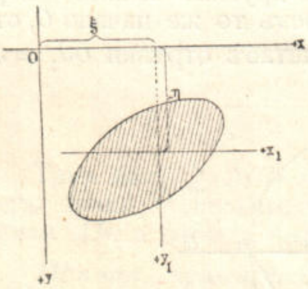
$$(6)\qquad \begin{cases} J_x = J_1\cos^2\alpha + J_2\sin^2\alpha = (J_1 + J_2\,\mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha \\ J_y = J_1 + J_2 - J_x \\ Z_{xy} = (J_x - J_2)\,\mathrm{tg}\,\alpha. \end{cases}$$

Послѣднее уравненіе можно замѣнить слѣдующимъ:

$$(7)\qquad Z_{xy} = \frac{1}{2}(J_1 - J_2)\sin 2\alpha,$$

которое получено изъ уравненій (1).

31. Другой способъ опредѣленія центробѣжнаго момента. Помощью уравненія (3) нахожденіе центробѣжнаго момента Z сводится къ опредѣленію моментовъ инерціи относительно каждой изъ осей. Иногда же случается, что непосредственное опредѣленіе Z ведетъ къ цѣли быстрѣе. Для этого примемъ, что центробѣжный моментъ Z_1 сѣченія F относительно двухъ взаимноперпендикулярныхъ осей x_1, y_1, проходящихъ черезъ центръ тяжести, уже заданъ и затѣмъ отыщемъ центробѣжный моментъ Z этого сѣченія относительно осей x, y, параллельныхъ осямъ x_1, y_1. Координаты центра тяжести сѣченія F пусть будутъ ξ и η (фиг. 40).



Фиг. 40.

Имѣемъ:
$$Z = \int (x_1 + \xi)\,(y_1 + \eta)\,dF =$$
$$= \int x_1 y_1\,dF + \xi\int y_1\,dF + \eta\int x_1\,dF + \eta\,\xi\,F,$$

гдѣ $\int y_1\,dF = 0$; $\int x_1\,dF = 0$, выражаютъ статическіе моменты сѣченія F относительно осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести; отсюда же получаемъ такое равенство:

$$(8)\qquad Z = Z_1 + F\eta\,\xi.$$

Если оси x и y будутъ главными осями инерціи, то $Z_1 = 0$ и

$$(9)\qquad Z = F\eta\,\xi.$$

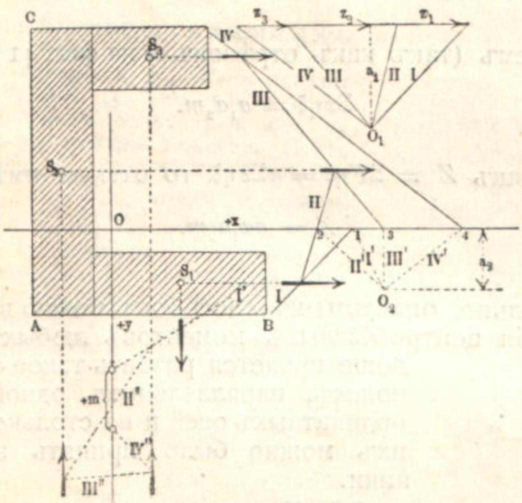
Съ помощью этого уравненія можно, напр., опредѣлить центробѣжный моментъ для сѣченія (фиг. 41), состоящаго изъ

---

*) Такъ какъ мы предполагаемъ $J_x > J_y$, см. стр. 42, то знаки у $\mathrm{tg}\,\gamma$ и Z противоположны, поэтому величина $(-Z\,\mathrm{tg}\,\gamma)$ всегда положительна.

прямоугольниковъ F_1, F_2, F_3, относительно какихъ нибудь осей, параллельныхъ сторонамъ AB и AC. Пусть $(+\eta_1, +\xi_1)$, $(-\eta_2, -\xi_2)$, $(-\eta_3, +\xi_3)$ координаты центровъ тяжести S_1, S_2, S_3 прямоугольниковъ, тогда получимъ:

$$Z = F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2 - F_3 \eta_3 \xi_3.$$



Фиг. 41.

Для опредѣленія этого момента съ помощью чертежа обратимъ три прямоугольника въ прямоугольники съ одинаковой шириной a; представимъ высоты новыхъ прямоугольниковъ $z_1 = \frac{F_1}{a}$, $z_2 = \frac{F_2}{a}$, $z_3 = \frac{F_3}{a}$ силами, дѣйствующими параллельно оси x, и построимъ при произвольномъ полюсѣ O_1 веревочный многоугольникъ $\overline{I\ II\ III\ IV}$, бока котораго дадутъ на оси x отрѣзки $\overline{1-2}$, $\overline{2-3}$, $\overline{3-4}$. Если полюсное разстояніе будетъ a_1, то эти отрѣзки равны:

$$\overline{1-2} = \frac{z_1 \eta_1}{a_1};\ \overline{2-3} = -\frac{z_2 \eta_2}{a_1};\ \overline{3-4} = -\frac{z_3 \eta_3}{a_1}.$$

Теперь будемъ считать эти отрѣзки за силы, приложенныя къ точкамъ S_1, S_2, S_3 и направленныя параллельно оси y; затѣмъ построимъ при полюсномъ разстояніи a_2 веревочный многоугольникъ $I''\ II''\ III''\ IV''$, бока котораго *перпендикулярны* лучамъ $\overline{I'\ II'\ III'\ IV'}$, проведеннымъ изъ O_2 къ концамъ отрѣзковъ оси x $\overline{1-2}$, $\overline{2-3}$, $\overline{3-4}$. *). Проведеніе изъ втораго полюснаго разстоянія на отрѣзокъ m, который отсѣкается на оси y внѣшними боками (I'' и IV'') этого веревочнаго многоугольника, равняется статическому моменту

*) Тотъ же результатъ можно получить иначе, повернувъ влѣво на 90^0 эти отрѣзки и пучекъ лучей $I'\ II'\ III'\ IV'$ и проводя затѣмъ $I'' \parallel I'$, $II'' \parallel II$ и т. д.

силъ $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$ относительно оси y. Кромѣ того получаемъ слѣдующую зависимость:

$$a_2 m = \overline{12}\,\xi_1 - \overline{23}\,\xi_2 + \overline{34}\,\xi_3$$

$$= \frac{z_1\,\eta_1\,\xi_1}{a_1} + \frac{z_2\,\eta_2\,\xi_2}{a_1} - \frac{z_3\,\eta_3\,\xi_3}{a_1} = \frac{\Sigma z\eta\xi}{a_2},$$

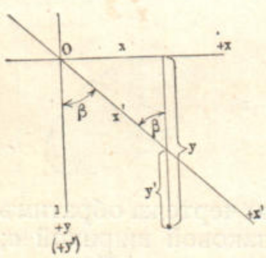
а отсюда найдемъ (такъ какъ отрѣзокъ m на фиг. 41 положителенъ)

$$\Sigma z\eta\xi = a_1 a_2 m.$$

Но такъ какъ $Z = \Sigma F\eta\xi = a\Sigma z\eta\xi$, то отсюда имѣемъ:

$$Z = a a_1 a_2 m.$$

Слѣдовательно, описаннымъ способомъ можно воспользоваться для опредѣленія центробѣжныхъ моментовъ любыхъ сѣченій. Вообще придется разбить такое сѣченіе на рядъ полосъ, параллельныхъ одной изъ двухъ координатныхъ осей и на столько узкихъ, чтобъ ихъ можно было принять за прямоугольники.



Фиг. 42.

32. Примѣненіе косоугольныхъ координатныхъ осей. Если первоначально сѣченіе было отнесено къ прямоугольнымъ осямъ x, y, а затѣмъ одна изъ осей x, при другой неподвижной оси y, повернута на уголъ $90^0 - \beta$ въ положеніе x' (фиг. 42), то косоугольныя координаты выразятся такъ:

$$y' = y - x\, cotg\, \beta \text{ и } x' = \frac{x}{sin\, \beta}.$$

Поэтому изъ моментовъ инерціи сѣченія относительно прямоугольныхъ осей

$$J_x = \int y^2 dF;\;\; J_x = \int x^2 dF;\;\; Z_{xy} = \int xy dF$$

найдемъ моменты инерціи относительно косоугольныхъ осей:

$$(10) \qquad J_y' = \int x'^2 dF = \frac{1}{sin^2\beta}\int x^2 dF = J_y \frac{1}{sin^2\beta}$$

$$(11) \qquad Z_{x'y'} = \int y'x' dF = \frac{1}{sin\,\beta}\left[\int yx dF - cotg\,\beta \int x^2 dF\right]$$

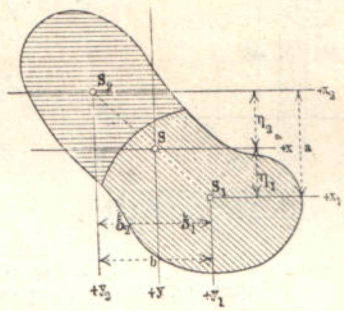
$$= \frac{1}{sin\,\beta}\left[Z_{xy} - J_y\, cotg\,\beta\right].$$

Послѣднее уравненіе приводитъ къ слѣдующему важному правилу: *если опредѣлить уголъ* β *помощью формулы:*

$$\cot g\,\beta = \frac{Z_{xy}}{J_y}, \tag{12}$$

то центробѣжный моментъ относительно косоугольныхъ осей y', x' *равенъ нулю.*

33. Выводъ нѣкоторыхъ важныхъ формулъ. Пусть сѣченіе состоитъ изъ двухъ частей, площади которыхъ F_1, F_2, а центры тяжести ихъ S_1, S_2, фиг. 43. Обѣ части отнесены къ прямоугольнымъ осямъ x_1, y_1 и x_2, y_2, проходящимъ черезъ центры тяжести. Пусть моменты инерціи J_{x_1}, J_{y_1}, $Z_{x_1y_1}$ части F_1 и моменты инерціи J_{x_2}, J_{y_2}, $Z_{x_2y_2}$ части F_2 даны, отыщемъ значенія J_x, J_y, Z_{xy} для всего сѣченія по отношенію къ осямъ x, y, проходящимъ черезъ центръ тяжести всего сѣченія, причемъ направленія x, x_1, x_2, а также y, y_1, y_2 между собой параллельны. При обозначеніяхъ на фиг. 43 получаемъ (по уравн. 1, см. № 26):



Фиг. 43.

$$J_x = J_{x_1} + F_1\eta_1^2 + J_{x_2} + F_2\eta_2^2.$$

Но такъ какъ $F_1\eta_1 = F_2\eta_2$ и $\eta_1 + \eta_2 = a$,

то
$$\eta_1 = \frac{F_2 a}{F_1 + F_2} \text{ и } \eta_2 = \frac{F_1 a}{F_1 + F_2},$$

поэтому
$$F_1\eta_1^2 + F_2\eta_2^2 = \frac{F_1F_2a\,(\eta_1 + \eta_2)}{F_1 + F_2} \text{ и окончательно:}$$

$$J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + \frac{F_1F_2a^2}{F_1 + F_2}. \tag{10}$$

Подобнымъ же путемъ найдемъ:

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} + \frac{F_1F_2b^2}{F_1 + F_2}, \tag{11}$$

а изъ уравненія: $Z_{xy} = Z_{x_1y_1} + Z_{x_2y_2} + F_1\eta_1\xi_1 + F_2\eta_2\xi_2$:

$$Z_{xy} = Z_{x_1y_1} + Z_{x_2y_2} + \frac{F_1F_2ab}{F_1 + F_2}. \tag{12}$$

Если оси $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$ будутъ главными осями частей F_1 и F_2, то получимъ: $Z_{x_1y_1} = 0$, $Z_{x_2y_2} = 0$ и наконецъ:

$$Z_{xy} = \frac{F_1F_2ab}{F_1 + F_2}. \tag{13}$$

Помощью уравненій (10) до (13) можно найти значенія J_x, J_y, Z_{xy}, не опредѣляя положенія центра тяжести S. Но эти формулы также и при данномъ положеніи S представляютъ преимущества, потому что числа, входящія въ нихъ большею частью круглѣе, чѣмъ численныя значенія η и ξ.

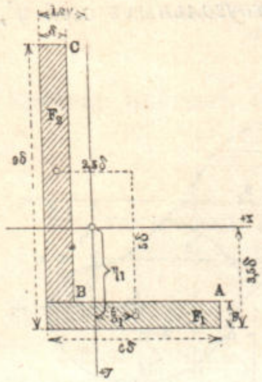
Если положеніе S извѣстно, то значенія $Z_{x_1y_1}$ и $Z_{x_2y_2}$ равны нулю, а тогда изъ уравненія

$$Z_{xy} = F_1\eta_1\xi_1 + F_2\eta_2\xi_2$$

при помощи равенствъ: $F_1\xi_1 = F_2\xi_2$; $F_1\eta_1 = F_2\eta_2$, можно также получить:

(14) $$Z_{xy} = F_1\xi_1 a = F_2\xi_2 a = F_1\eta_1 b = F_2\eta_2 b.$$

Примѣръ. Опредѣлимъ значенія J_x, J_y, Z_{xy} для сѣченія уголка, фиг. 44 относительно осей, параллельныхъ сторонамъ уголка и проходящихъ черезъ центръ тяжести сѣченія. Не опредѣляя положенія осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести, найдемъ требуемыя значенія, разложивъ сѣченіе на 2 прямоугольника, площади которыхъ $F_1 = 6\delta^2$ и $F_2 = 9\delta^2$:



Фиг. 44.

$$J_x = \frac{1}{12}(6 \cdot 1^3 + 1 \cdot 9^3)\,\delta^4 + \frac{6 \cdot 9}{6+9}\,5^2\delta^4 = 151{,}25\delta^4$$

$$J_y = \frac{1}{12}(1 \cdot 6^3 + 9 \cdot 1^3)\,\delta^4 + \frac{6 \cdot 9}{6+9}\,2{,}5^2\delta^4 = 41{,}25\delta^4$$

$$Z_{xy} = \frac{6 \cdot 9}{6+9} \cdot 5 \cdot 2{,}5\delta^4 = 45\delta^4.$$

Если же почему либо требуется знать положеніе центра тяжести (напр. при расчетѣ на изгибъ), то опредѣляемъ η_1 и ξ_1 или η_2 и ξ_2; а для этого имѣемъ уравненія (см. фиг. 43):

(15) $$\begin{cases} \eta_1 = \dfrac{F_2 a}{F_1 + F_2}; & \xi_1 = \dfrac{F_2 b}{F_1 + F_2}; \quad \dfrac{\eta_1}{\xi_1} = \dfrac{a}{b} \\ \eta_2 = \dfrac{F_1 a}{F_1 + F_2}; & \xi_2 = \dfrac{F_1 b}{F_1 + F_2}; \quad \dfrac{\eta_2}{\xi_2} = \dfrac{a}{b}. \end{cases}$$

Для даннаго примѣра находимъ:

$$\eta_1 = \frac{9\delta^2 \cdot 5\delta}{(6+9)\,\delta^2} = 3\delta \text{ и } \xi_1 = \eta_1\frac{b}{a} = \eta_1\frac{1}{2} = 1{,}5\delta.$$

Такимъ образомъ этими двумя значеніями положеніе S опредѣлено, а отсюда получаемъ:

$$Z_{xy} = F_1\xi_1 a = 6 \cdot 1{,}5 \cdot 5\delta^4 = 45\delta^4.$$

Для столь простыхъ сѣченій, какъ фиг. 44, вычисленіе ведетъ къ цѣли быстрѣе, чѣмъ графическій пріемъ *); но если требуется принять во вниманіе закругленія угловъ A, B, C (что вполнѣ излишне), то графическій способъ будетъ цѣлесообразнѣе.

---

§ 8.

Эллипсъ инерціи.

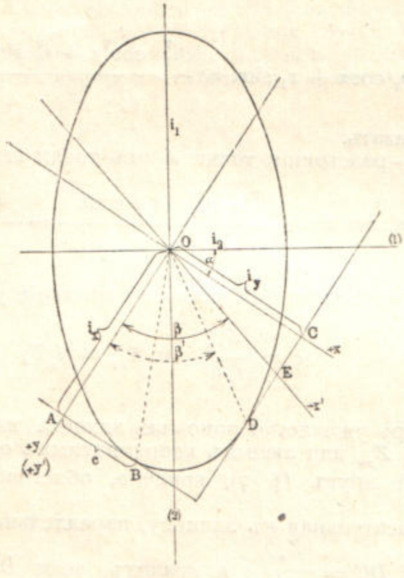
34. Для прямоугольныхъ координатныхъ осей. Отнесемъ сѣченіе къ главнымъ осямъ (1) и (2), проходящимъ черезъ точку O. Пусть главные радіусы инерціи $i_1 = \sqrt{\dfrac{J_1}{F}}$ и $i_2 = \sqrt{\dfrac{J_2}{F}}$ будутъ заданы. Тогда для

*) Укажемъ на приблизительныя формулы для угловаго желѣза Zimmermann'a въ журн. Centralblatt der Bauverwaltung, 1885, стр. 33 и 84.

радіуса инерціи i_x относительно оси x, проходящей черезъ точку O и наклоненной къ главной оси (1) подъ угломъ α, находимъ выраженіе:

$$i_x^2 = i_1^2 \cos^2\alpha + i_2^2 \sin^2\alpha \text{ (по уравн. 6 въ № 30).} \tag{1}$$

Если отложить на оси y, перпендикулярной къ оси x, отрѣзокъ $\overline{OA} = i_x$ (фиг. 45), провести черезъ точку A прямую, параллельную оси x и повторить



Фиг. 45.

это для всѣхъ возможныхъ положеній оси x, то эти параллельныя будутъ обертывать эллипсъ, который называется *эллипсомъ инерціи* относительно точки O; если же точка O будетъ центромъ тяжести сѣченія, то этотъ эллипсъ инерціи называется *центральнымъ эллипсомъ*. Полуоси эллипса инерціи совпадаютъ съ главными осями сѣченія и равны: одна $= i_1$ (перпендикулярная къ оси 2), а другая $= i_2$ (перпендикулярная къ оси 1). Докажемъ это. Напишемъ уравненіе эллипса, отнесеннаго къ полуосямъ i_1 и i_2 какъ къ координатнымъ осямъ:

$$\frac{y_1^2}{i_1^2} + \frac{x_1^2}{i_2^2} = 1, \tag{2}$$

гдѣ x_1 и y_1 координаты какой нибудь точки B эллипса (причемъ можетъ быть $y_1 \parallel i_1$;); дифференцируя это уравненіе, получимъ:

$$\frac{y_1 dy_1}{i_1^2} + \frac{x_1 dx_1}{i_2^2} = 0 \text{ или } x_1 = y_1 \frac{i_2^2}{i_1^2} \frac{dy_1}{dx_1};$$

поэтому координаты точки B эллипса, которой соотвѣтствуетъ касательная, наклоненная къ оси (1) подъ угломъ α, должны удовлетворять кромѣ уравн. (2) еще уравненію:

$$x_1 = y_1 \frac{i_2^2}{i_1^2} \operatorname{tg}\alpha. \tag{3}$$

Изъ уравн. (2) и (3) и, принимая во вниманіе уравн. (1), получаемъ:

$$y_1^2 = \frac{i_1^4 \cos^2\alpha}{i_1^2 \cos^2\alpha + i_2^2 \sin^2\alpha} = \frac{i_1^4 \cos^2\alpha}{i_x^2},$$

такимъ образомъ $y_1 = \dfrac{i_1^2 \cos\alpha}{i_x}$ и затѣмъ $x_1 = \dfrac{i_2^2 \sin\alpha}{i_x}$;

а поэтому длина перпендикуляра, опущеннаго изъ O на касательную къ эллипсу въ точкѣ B равна:

$$\overline{OA} = y_1 \cos\alpha + x_1 \sin\alpha = \frac{i_1^2 \cos^2\alpha + i_2^2 \sin^2\alpha}{i_x} = i_x,$$

что и требовалось доказать.

Для величины c—разстоянія точки A отъ точки касанія B получаемъ:

$$c = y_1 \sin\alpha - x_1 \cos\alpha = \frac{(i_1^2 - i_2^2) \sin\alpha \cos\alpha}{i_x} = \frac{(J_1 - J_2) \sin 2\alpha}{2 i_x F},$$

а изъ этого уравненія слѣдуетъ, принимая во вниманіе уравн. (7) въ № 30:

$$c = \frac{Z_{xy}}{i_x F}, \text{ и } Z_{xy} = c i_x F; \tag{4}$$

такимъ образомъ теперь уже легко помощью эллипса инерціи опредѣлить моменты инерціи J_x, J_y, Z_{xy} для любыхъ координатныхъ осей.

Вспомогательный кругъ (§ 7), конечно, облегчаетъ примѣненіе этого способа.

Если CD есть касательная къ эллипсу, параллельная оси y, и D ея точка касанія, то $\overline{OC} = i_y$ и $DC = \dfrac{Z_{xy}}{i_y F}$; а значитъ, если $\overline{DC} = e$, то $Z_{xy} = e i_y F$.

Направленія OB и OC суть сопряженные діаметры эллипса инерціи, точно также OD и OA.

35. Для косоугольныхъ осей. Если повернуть ось x на уголъ $90^0 - \beta$ въ положеніе x', ось же y оставить безъ измѣненія (фиг. 45 и 42), то получимъ слѣдующія значенія относительно косоугольныхъ осей y', x' (по № 32):

$$J_{y'} = J_y \cdot \frac{1}{\sin^2\beta} \text{ и } Z_{x'y'} = \frac{1}{\sin\beta} (Z_{xy} - J_y \operatorname{cotg}\beta),$$

откуда, при помощи значеній: $J_{y'} = F i_{y'}^2$; $J_y = F i_y^2$; $Z_{xy} = e i_y F$, получаемъ:

$$i_{y'} = i_y \frac{1}{\sin\beta} \text{ и } Z_{x'y'} = i_y \frac{1}{\sin\beta} (e - i_y \operatorname{cotg}\beta) F.$$

Обозначимъ точку пересѣченія оси x' съ касательной къ эллипсу DC черезъ E; тогда $\overline{OE} = i_{y'}$; $\overline{DE} = e - i_y \operatorname{cotg}\beta$, а поэтому:

$$J_{y'} = F \cdot \overline{OE}^2; \quad Z_{x'y'} = F \cdot \overline{OE} \cdot \overline{ED}.$$

Дадимъ оси x' направленіе OD, сопряженное съ осью y, тогда $Z_{x'y'} = 0$; отсюда получаемъ слѣдующее правило:

Центробѣжный моментъ сѣченія относительно сопряженныхъ діаметровъ эллипса инерціи равняется нулю.

Уголъ β', заключающійся между сопряженными діаметрами OD и OA, опредѣляется уравненіемъ: $\operatorname{cotg}\beta' = \dfrac{Z_{xy}}{J_y}$. Это можно получить также изъ правила, высказаннаго въ концѣ № 32, а также изъ фиг. 45, откуда находимъ:

$$\cot g\, \beta' = \frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} = \frac{\quad}{i_y} = \frac{Z_{xy}}{J_y}$$

Если ось x' имѣетъ положеніе OD, то радіусъ инерціи $i_{y'}$ равняется половинѣ діаметра эллипса OD.

Зная J_x, J_y, Z_{xy} относительно любыхъ осей, мы можемъ опредѣлить въ каждой четверти эллипса касательную и ея точку касанія (на фиг. 45 точки B, D, касательныя AB, DC, а также 2 соотвѣтствующія точки и 2 касательныя по другую сторону оси y). Такимъ образомъ эллипсъ заданъ 8 элементами, для построенія же коническаго сѣченія достаточно 5 элементовъ.

ОТДѢЛЪ III.

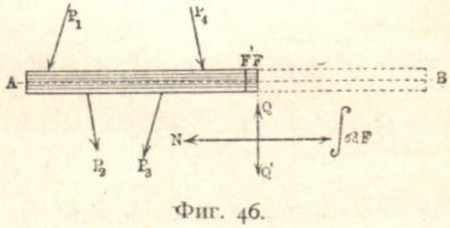
Напряженія въ прямыхъ стержняхъ.

§ 9.

Нормальныя напряженія.

36. Условія равновѣсія. Прямой упругій стержень при дѣйствіи на него конечныхъ силъ при достаточной прочности будетъ мѣнять свою первоначальную форму до тѣхъ поръ, пока внутреннія силы стержня не уравновѣсятся съ внѣшними. Это состояніе равновѣсія будемъ разсматривать въ предположеніи, что происходящая деформація незначительна и что вліяніемъ ея на положенія точекъ приложенія силъ и на ихъ направленія можно пренебречь; такимъ образомъ при составленіи условій равновѣсія мы предполагаемъ, что всѣ силы остаются въ томъ положеніи, какъ будто стержень былъ абсолютно жесткимъ.

Сѣченіемъ F, перпендикулярнымъ къ оси стержня AB (фиг. 46),



Фиг. 46.

раздѣлимъ стержень на двѣ части и затѣмъ приведемъ всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія на одну изъ частей, напр. на лѣвую, P_1, P_2, P_3 . . . . . (посредствомъ способа, описаннаго въ № 19), къ двумъ силамъ N и Q, изъ которыхъ одна направлена нормально къ сѣченію, а другая лежитъ въ плоскости сѣченія. Сила N называется *нормальной* силой сѣченія F; будемъ считать ее положительной, если она имѣетъ стремленіе отдѣлить лѣвую часть стержня отъ правой, которую мы воображаемъ неподвижной. Сила Q будетъ силой *перерѣзывающей* для сѣченія F; знакъ ея пока не разсматриваемъ.

Вмѣстѣ съ внѣшними силами на разсматриваемую лѣвую часть стержня дѣйствуютъ еще въ сѣченіи F внутреннія силы, вызываемыя присутствіемъ правой части стержня. Предположимъ, что сила, дѣйствующая на весьма малый элементъ сѣченія dF, равномѣрно распредѣлена по площади dF; разложимъ ее на составляющія σdF и τdF, изъ которыхъ первая перпендикулярна къ плоскости сѣченія, другая лежитъ въ плоскости сѣченія. Причемъ σ и τ обозначаютъ величины силъ, приходящихся на единицу площади dF; эти силы называются *напряженіями*, а именно σ называется *нормальнымъ напряженіемъ*, τ — называется *перерѣзывающимъ напряженіемъ*. *σ — какъ растяженіе принимается положительнымъ, а какъ сжатіе отрицательнымъ.*

Для равновѣсія внутреннихъ силъ съ внѣшними необходимо, чтобъ:

1) равнодѣйствующая $\int \sigma dF$ всѣхъ силъ σdF, перпендикулярныхъ къ плоскости сѣченія была равна и прямо противоположна по направленію нормальной силѣ N,
2) равнодѣйствующая Q' всѣхъ силъ τdF, дѣйствующихъ въ плоскости сѣченія, была равна и прямо противоположна по направленію перерѣзывающей силѣ Q.

37. Опредѣленіе нормальныхъ напряженій. Займемся сначала опредѣленіемъ напряженій σ; отнесемъ сѣченіе къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ (u, v), начало которыхъ совпадаетъ съ центромъ тяжести сѣченія S, фиг. 47. Точка приложенія K нормальной силы N отстоитъ отъ S на разстояніи f; прямая SK, представляющая слѣдъ плоскости дѣйствія силъ на плоскости сѣченія, образуетъ съ осью u уголъ β *).

Вслѣдствіе дѣйствія внѣшнихъ силъ на упругій стержень разстояніе какой либо точки C (координаты которой u и v) разсматриваемаго поперечнаго сѣченія отъ безконечно близко лежащаго сѣченія F измѣняется на величину, положимъ, λ, фиг. 46, причемъ въ предѣлахъ упругости и при неизмѣняющейся температурѣ можно положить: $\sigma = A\lambda$, гдѣ подъ A подразумѣваемъ постоянную, опредѣленную изъ опытовъ величину, которая при постоянномъ коэффиціентѣ упругости (что мы всегда будемъ предполагать), будетъ имѣть для всѣхъ точекъ сѣченія одно и тоже значеніе. Затѣмъ можно принять, что λ есть функція первой степени величинъ u и v **). Если въ каждой точкѣ C сѣченія возставить перпендику-

---

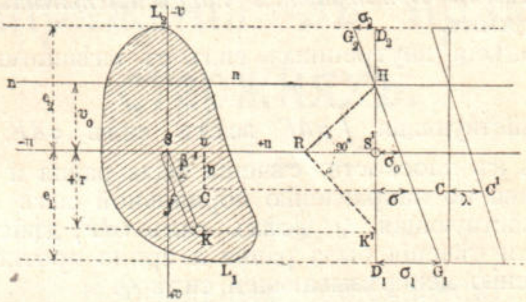
*) Ради краткости выраженія вмѣсто „слѣдъ плоскости дѣйствія силъ на плоскости сѣченія“ будемъ говорить „плоскость дѣйствія силъ“.

Примѣч. переводчиковъ.

**) Это совпадаетъ какъ разъ съ извѣстными изъ теоріи сопротивленія предположеніями Навье, который при *опредѣленіи напряженій* σ, принимаетъ, что первоначально плоскія сѣченія остаются плоскими и послѣ изгиба стержня, и въ то же время пренебрегаетъ кривизной матеріальныхъ линій, соединяющихъ соотвѣтствующія точки двухъ сосѣднихъ сѣченій. Примѣнимость теоріи Навье для стержней, поперечныя измѣренія которыхъ малы въ сравненіи съ ихъ длиной, доказана Сенъ-Венаномъ (Liouville Journal, 1856), Кирхгофомъ (Crelle Journal, 1859) и Pochhammer'омъ въ его сочиненіи о равновѣсіи упругаго стержня (Kiel, 1879).

ляры $CC' = \lambda$, то точки C' будутъ лежать въ плоскости, пересѣкающей сѣченіе по прямой nn. Для всѣхъ точекъ линіи nn будетъ имѣть мѣсто $\lambda = 0$, а также $\sigma = 0$; поэтому прямая nn называется *линіей нулевыхъ напряженій* (также *нейтральной осью*) или короче *нулевой линіей;* направленіе ея мы будемъ считать заданнымъ; произвольное же до сихъ поръ направленіе оси u проведемъ параллельно nn.

Точкамъ сѣченія, равно удаленнымъ отъ nn, соотвѣтствуютъ равныя значенія λ, а также равныя напряженія σ; напряженія для какихъ либо двухъ точекъ сѣченія пропорціональны разстояніямъ этихъ точекъ (по любому направленію) до прямой nn.



Фиг. 47.

Обозначимъ, фиг. 47, черезъ v_0 вертикальное разстояніе (безъ знака) оси nn отъ оси u, и буквой σ_0 — напряженіе въ точкахъ оси u, тогда получимъ: $\sigma : \sigma_0 = (v + v_0) : v_0$ или $\sigma = \sigma_0 + \frac{\sigma_0}{v_0} v$ или

(1) $$\sigma = \sigma_0 + Bv,$$

гдѣ $B = \frac{\sigma_0}{v_0}$ для разсматриваемаго сѣченія будетъ постоянно.

Моменты относительно осей u и v внутренней силы σdF, дѣйствующей на элементъ площади сѣченія dF, будутъ $= \sigma dFv$ и $= \sigma dFu$, а моменты относительно тѣхъ же осей нормальной силы N, дѣйствующей въ K, равны $Nf \sin\beta$ и $Nf \cos\beta$. Уравненія, выражающія условія равновѣсія (см. (1) въ № 36), будутъ слѣдующія:

(2) $$\int \sigma\, dF = N; \int \sigma\, v dF = Nf \sin\beta; \int \sigma\, u dF = Nf \cos\beta;$$

первыя два уравненія по подстановкѣ σ примутъ видъ:

$$\sigma_0 F = N, \; BJ_u = Nf \sin\beta,$$

причемъ было принято во вниманіе, что $\int dF = F$, $\int v dF = 0$,

$\int v^2 dF = J_u$. Изъ этихъ уравненій получаемъ:

$$\sigma_0 = \frac{N}{F};\ B = \frac{Nf}{J_u}\sin\beta \text{ и наконецъ:}$$

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Nf \cdot v}{J_u}\sin\beta. \tag{3}$$

Третье уравненіе (2) преобразуется теперь въ слѣдующее:

$$\int\left(\frac{N}{F} + \frac{Nf \cdot v}{J_u}\sin\beta\right) u dF = Nf\cos\beta;$$

такъ какъ $\int u dF = 0$ и $\int uv dF = Z_{uv}$, то изъ него получимъ условіе:

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{Z_{uv}}{J_u}, \tag{4}$$

которымъ опредѣляется направленіе нейтральной оси.

Разстояніе v_0 этой линіи отъ оси u опредѣлится, если въ уравненіе (3) подставить $\sigma = 0$ и $v = v_0$; тогда получимъ

$$0 = \frac{N}{F} + \frac{Nfv_0}{J_u}\sin\beta, \text{ а отсюда}$$

$$v_0 = -\frac{J_u}{Ff\sin\beta} = -\frac{J_u}{Fr} = -\frac{i_u^2}{r}, \tag{5}$$

гдѣ r есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ точки K на ось u. Знакъ минусъ въ уравн. (5) показываетъ, что нейтральная ось *лежитъ по одну сторону центра тяжести S, а точка K по другую сторону.*

Изъ уравненій (4) и (5) узнаемъ, что положеніе нейтральной оси не зависитъ отъ величины нормальной силы N, а зависитъ отъ положенія точки приложенія силы K. *Такимъ образомъ для каждой точки приложенія K имѣется опредѣленное положеніе нейтральной оси.*

Всѣмъ точкамъ приложенія силъ, лежащимъ на одной и той же плоскости дѣйствія силъ, соотвѣтствуютъ нейтральныя оси того же направленія, потому что β не зависитъ отъ f.

Если K совпадаетъ съ центромъ тяжести ($f = 0$), то нейтральная ось лежитъ въ безконечности ($v_0 = \infty$); если же K безконечно удалена ($f = \infty$), то нейтральная ось проходитъ черезъ центръ тяжести. Во второмъ случаѣ сѣченіе напряжено безконечно малой нормальной силой, лежащей безконечно далеко.

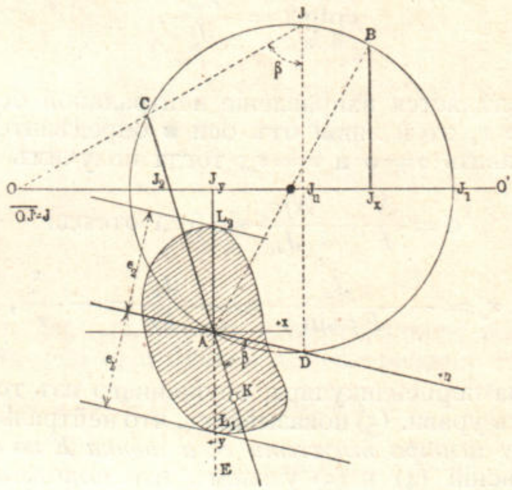
Для того чтобъ воспользоваться выведенными правилами при опредѣленіи напряженій σ для какого нибудь неправильнаго сѣченія, отнесемъ его къ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ (x, y), начало которыхъ лежитъ въ центрѣ тяжести, и которыя надо такъ выбрать, чтобъ три момента инерціи

$$J_x = \int y^2 dF;\ J_y = \int x^2 dF;\ Z_{xy} = \int xy dF$$

опредѣлялись по возможности быстрѣе на основанiи способовъ, описанныхъ въ §§ 6 и 7. Затѣмъ строимъ вспомогательную окружность (фиг. 38) AB, которая облегчаетъ нахожденiе моментовъ инерцiи относительно любыхъ прямоугольныхъ координатныхъ осей. Причемъ рекомендуется выбрать точку A въ центрѣ тяжести сѣченiя.

На фиг. 48 отложено $\overline{AJ_y} = +Z_{xy}$; затѣмъ на прямой OO', параллельной оси x, откладываютъ отрѣзки $\overline{J_yO} = J_y$ и $\overline{OJ_x} = J_x$ и въ точкѣ J_x къ прямой OO' возставляютъ перпендикуляръ $\overline{J_xB} = Z_{xy}$. Дiаметръ AB даетъ вспомогательную окружность.

Если провести ось u (положенiе которой считаемъ пока извѣстнымъ) параллельно нейтральной оси до пересѣченiя съ окружностью въ точкѣ D, затѣмъ провести хорду DJ перпендикулярно къ прямой OO' и соединить J съ O прямой, пересѣкающей окружность въ точкѣ C, то плоскость дѣйствiя силъ KA проходитъ че-



Фиг. 48.

резъ точку C; дѣйствительно, въ № 28 было доказано, что $\overline{OJ_u} = J_u$, $\overline{J_uD} = \overline{J_uJ} = Z_{uv}$, а также $\operatorname{cotg} \angle OJD = \frac{Z_{uv}}{J_u} = \operatorname{cotg} \beta$ (по уравн. 4) и $\angle OJD = \beta$. А отсюда слѣдуетъ: $\angle CAD = 2R - \beta$ и наконецъ $\angle KAD = \beta$.

Можно рѣшить и обратную задачу: для данной плоскости дѣйствiя силъ KA опредѣлить соотвѣтствующую ось u; для этого продолжаемъ KA до пересѣченiя съ окружностью въ точкѣ C, проводимъ сѣкущую OCJ и хорду JD, перпендикулярно къ линiи OO'. Ось u пройдетъ черезъ обѣ точки A и D.

Напряженiя σ, разъ ось u проведена, найдутся помощью уравненiя 3. Слѣдуетъ замѣтить, что представленный отрѣзкомъ $\overline{OJ}$ моментъ инерцiи, *который мы впослѣдствiи будемъ обозначать буквой* J, равняется $\frac{J_u}{\sin \beta}$.

Такимъ образомъ имѣемъ

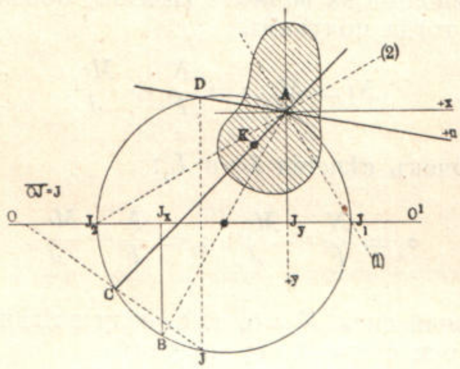
$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Nfv}{J}, \tag{6}$$

а для крайнихъ точекъ сѣченія L_1 и L_2, которыя находятся отъ оси u на разстояніи $= + e_1$ и $= - e_2$, получимъ:

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nfe_1}{J};\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Nfe_2}{J}. \tag{7}$$

Если точки C и D, фиг. 48, лежатъ близко отъ A, то найденныя пересѣченія прямыхъ AC, AD съ окружностью могутъ повести къ ошибкамъ. Тогда лучше всего, проведя окружность, опредѣлить точку C, какъ подошву перпендикуляра BC, опущеннаго изъ B на плоскость дѣйствія силъ, и провести направленіе оси u, сдѣлавъ $\angle DAE = \angle OCA$. Точка D получится теперь какъ подошва перпендикуляра, опущеннаго изъ B на AD; затѣмъ найдемъ J, проводя $DJ \perp OO'$ до пересѣченія въ точкѣ J съ продолженной прямой OC.

Упомянемъ еще, что оси (x, y) надо такъ выбирать, чтобъ удовлетворить предположеніямъ, принятымъ на фиг. 48: $J_x > J_y$ и $Z_{xy} > 0$. Но это не необходимо. Если будетъ, напр., $J_x < J_y$ и $Z_{xy} < 0$, то получимъ фиг. 49.



Фиг. 49.

Въ большинствѣ случаевъ опредѣленіе напряженій σ_1 и σ_2 расчетомъ будетъ проще; для этого находятъ положеніе оси u и значеніе J съ помощью чертежа, построеннаго по предыдущимъ правиламъ. Иногда же будетъ удобнѣе примѣнить слѣдующій пріемъ.

Напряженія σ, опредѣленныя для различныхъ значеній v, откладываемъ какъ ординаты отъ прямой D_1D_2, перпендикулярной къ оси u (фиг. 47). Эти ординаты опредѣлятъ прямую G_1G_2, которая пройдетъ черезъ H, точку пересѣченія D_1D_2 и nn, и которая для значенія $v = 0$ даетъ ординату $\sigma_0 = \frac{N}{F}$. Такимъ образомъ съ помощью этого значенія σ_0 и съ помощью значеній v_0, найденныхъ изъ уравн. (5), опредѣлится прямая G_1G_2, которая и дастъ величину всѣхъ напряженій.

Когда три момента инерціи J_x, J_y, Z_{xy} опредѣляются по способамъ §§ 6 и 7 въ видѣ: $J_x = aa_1a_2n_x$; $J_y = aa_1a_2n_y$; $Z_{xy} = aa_1a_2m$, гдѣ a, a_1, a_2 произвольно взятые отрѣзки, то значеніе J_u принимаетъ видъ: $J_u = aa_1a_2n_u$, гдѣ n_u изображается отрѣзкомъ $\overline{OJ_u}$ Затѣмъ по № 25 имѣемъ: $F = a\Sigma z$, а также (безъ знака):

$v_o = \frac{a_1 a_2 n_u}{r \Sigma z}$. Если первое полюсное разстояніе будетъ взято $a_1 = \frac{1}{2} \Sigma z$, то получимъ $v_0 = \frac{a_2 n_u}{2r}$, какъ четвертую пропорціональную къ величинамъ a_2, n_u и $2r$. Можно также выбрать $a_2 = 2\varepsilon r$, гдѣ ε—произвольное число; тогда получимъ $v_o = \varepsilon n_u$.

Второй способъ опредѣленія v_o чертежемъ состоитъ въ нахожденіи радіуса инерціи i_u (см. № 25 и фиг. 27) и въ разрѣшеніи равенства $v_o = \frac{i_u^2}{r}$. Такимъ образомъ, если отложимъ (фиг. 47) $\overline{S'R} = i_u$, $\overline{S'K'} = r$, соединимъ R съ K' прямою и возставимъ къ ней въ R перпендикуляръ, то этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ прямую D_1D_2 въ точкѣ H, потому что:

$$\overline{S'R}^2 = \overline{S'K'} . \overline{S'H}, \text{ т. е. } i_u^2 = \overline{S'K'} . r \text{ или } \overline{S'K'} = \frac{i_u^2}{r} = v_o.$$

Описанное опредѣленіе напряженій σ съ помощью прямой G_1G_2 непримѣнимо для случая, когда $N = 0$ и $r = \infty$; этотъ случай мы сейчасъ же изслѣдуемъ.

38. Объ изгибающемъ моментѣ. Произведеніе изъ нормальной силы N на разстояніе f до центра тяжести S называется *изгибающимъ моментомъ въ данномъ сѣченіи;* обозначимъ этотъ моментъ буквою M, тогда получимъ:

$$(8) \qquad Nf = M; \ \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J},$$

а для крайнихъ точекъ сѣченія L_1 и L_2:

$$(9) \qquad \sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Me_1}{J}; \ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Me_2}{J}.$$

Если нормальная сила $N = 0$, т. е. если всѣ внѣшнія силы перпендикулярны къ оси стержня, то получимъ:

$$(10) \qquad \sigma = \frac{Mv}{J}; \ \sigma_1 = \frac{Me_1}{J}; \ \sigma_2 = -\frac{Me_2}{J}.$$

Этотъ случай нагрузки мы разсматривали раньше, какъ результатъ дѣйствія на сѣченіе весьма малой безконечно удаленной нормальной силы. Нейтральная ось для этого случая пройдетъ черезъ центръ тяжести сѣченія; ея направленіе и моментъ инерціи J относительно нея опредѣлятся съ помощью вспомогательной окружности; напряженія же σ слѣдуетъ найти расчетомъ:

39. Примѣръ. Пусть сѣченіе ⁊_, фиг. 50, находится подъ дѣйствіемъ нормальной силы N и изгибающаго момента M. Направленіе плоскости дѣйствія силы AK образуетъ съ ребромъ уголъ въ 17°. Опредѣлимъ напряженія σ_1 и σ_2.

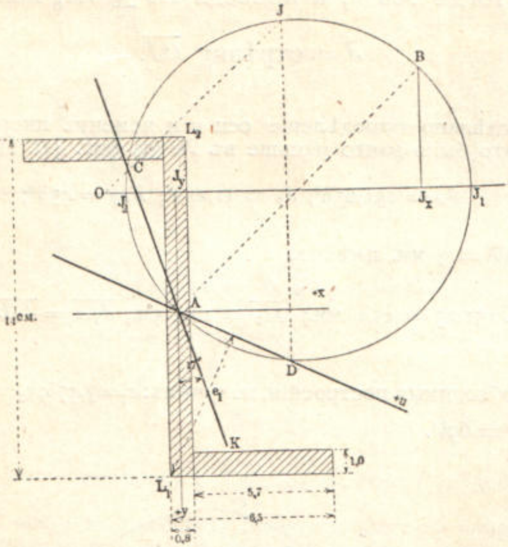
Отнесемъ сѣченіе къ прямоугольнымъ осямъ (x, y), проходящимъ черезъ центръ тяжести; одна изъ осей параллельна ребру. Вычислимъ моменты инерціи:

$$J_x = \frac{1}{12}(6{,}5 \, . \, 14^3 - 5{,}7 \, . \, 12^3) = 666 \text{ см}^4.,$$

$$J_y = \frac{1}{12}[1{,}0\,(6{,}5 + 5{,}7)^3 + 13 \, . \, 0{,}8^3] = 152 \text{ см}^4.$$

$$Z_{xy} = 2 \, . \, 5{,}7 \, . \, 1{,}0 \, . \, 6{,}5 \, . \, 3{,}25 = 241 \text{ см}^4; \ F = 6{,}5 \, . \, 14 - 5{,}7 \, . \, 12 = 22{,}6 \text{ см}^2.$$

Выраженія для J_x, J_y получаются на основаніи формулъ, выведенныхъ въ № 26 а для параллелограмма. Для отысканія J_x надо передвинуть одну полку въ направленіи x и обратить сѣченіе $\urcorner\!\llcorner$ въ сѣченіе $[\!\sqsubset$ (разность двухъ прямоугольниковъ). Для отысканія J_y надо обратить данное сѣченіе въ сѣченіе $\perp$, перемѣстивъ одну полку по направленію оси y (сумма двухъ прямоугольниковъ). Выраженіе для Z_{xy} получимъ изъ изслѣдованій № 31; площадь полки $= 5{,}7 \cdot 1{,}0$, а координаты центра тяжести $\pm 6{,}5$ см. и $\pm 3{,}25$ см. (Рекомендуется ради практики построить значенія J_x, J_y, Z_{xy} графически).



Фиг. 50.

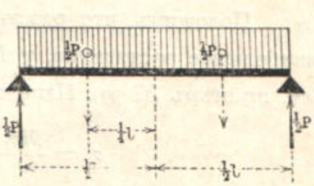
При построеніи круга, фиг. 50, былъ выбранъ масштабъ 10 см.$^4 = \frac{2}{3}$ мм., причемъ было отложено: $\overline{AJ_y} = Z_{xy} = \frac{2}{3} \cdot 24{,}1 = 16{,}1$ мм., $\overline{J_yO} = J_y = 10{,}1$ мм., $\overline{OJ_x} = J_x = 44{,}4$ мм., $\overline{J_xB} = \overline{AJ_y}$. По проведеніи прямыхъ OCJ, $JD \perp OO'$ и AD (послѣдняя представляетъ искомую ось u) получаемъ:

$$J = \overline{OJ} = 34{,}7 \text{ мм.} = \frac{30}{2} \cdot 34{,}7 \text{ см.}^4 = 520 \text{ см.}^4;\ e_1 = e_2 = 6{,}49 \text{ см.},$$

а затѣмъ по уравненію (9):

$$\sigma_1 = \frac{N}{22{,}6} + \frac{M \cdot 6{,}49}{520};\ \sigma_2 = \frac{N}{22{,}6} - \frac{M \cdot 6{,}49}{520},$$

Такъ напримѣръ, возьмемъ свободно лежащую балку, нагруженную равномѣрно распредѣленной нагрузкой P, фиг. 51.



Фиг. 51.

Сѣченіе балки $\urcorner\!\llcorner$, $N = 0$, $M = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Pl}{8}$. Полагая прочное сопротивленіе (на сжатіе или растяженіе) $\sigma = 750$ кгр./см.^{2}, найдемъ изъ слѣдующаго уравненія ту величину груза P, который выдержитъ разсматриваемая балка:

$$\sigma = 750 = \frac{M \cdot 6{,}49}{520} = \frac{Pl \cdot 6{,}49}{8 \cdot 520},\ \text{и если } l = 400 \text{ см.; то } P = 1200 \text{ клгр.}$$

40. Если плоскость дѣйствія силы совпадаетъ съ осью y, то ось u проходитъ черезъ точку O (фиг. 52); точно также найдемъ, что $\overline{OD} = \overline{OJ}$. Обративъ вниманіе на то, что $BD \perp OA$, можемъ придти къ слѣдующему способу (фиг. 53).

Отложимъ отъ центра тяжести O по оси x отрѣзки: $\overline{OJ_y} = J_y$, $\overline{OJ_x} = J_x$ и перпендикулярно къ нимъ: $\overline{J_yA} = \overline{J_xB} = Z_{xy}$. Точки O и A опредѣлятъ тогда ось u, а проведя $\overline{BJ} \perp \overline{OA}$, получимъ:

$$J = \text{отрѣзку } \overline{OJ}.$$

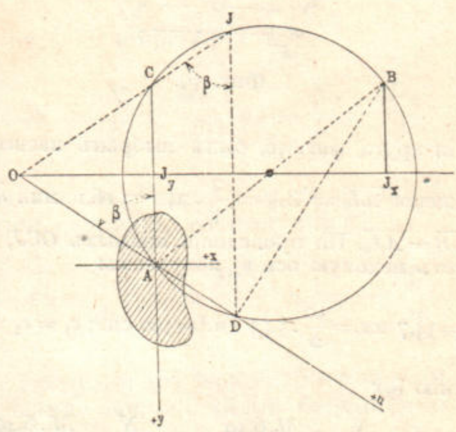
На фиг. 53 сдѣлано опредѣленіе оси u и момента инерціи J для угловаго желѣза (сѣченіе это было взято раньше въ № 33, фиг. 44). По № 33 имѣемъ:

$$J_x = 151{,}25\delta^4;\ J_y = 41{,}25\delta^4;\ Z_{xy} = 45\delta^4;$$

при масштабѣ: $10\delta^4 = 3$ мм. имѣемъ:

$$\overline{OJ_x} = \frac{3}{10} \cdot 151{,}25 = 45{,}4 \text{ мм.};\ \overline{OJ_y} = 12{,}4 \text{ мм.};\ \overline{J_yA} = \overline{J_xB} = 13{,}5 \text{ мм.}$$

Сдѣлавъ необходимыя построенія, получимъ: $e_1 = 3{,}47\delta$; $e_2 = 4{,}02\delta$; $\overline{OJ} = 20{,}7$ мм. и $J = \frac{10}{3} \cdot 20{,}7\delta^4 = 69\delta^4$.



Фиг. 52.

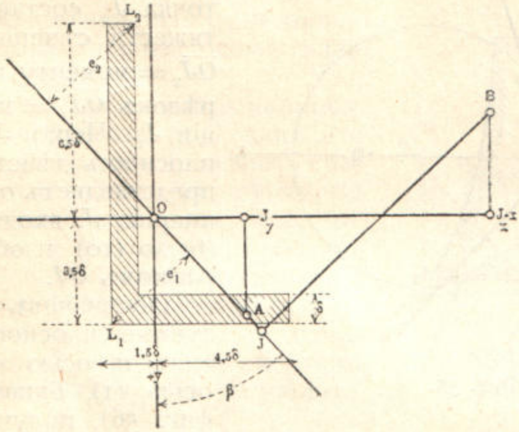
Положимъ, что разсматриваемый стержень чугунный; у L_1 вызывается наибольшее растяженіе, у L_2 наибольшее сжатіе. Положимъ $N = 0$ и $M = \frac{Pl}{8}$ (см. примѣръ № 39). Напишемъ условія прочности:

$$\sigma_1 = \frac{Me_1}{J} = \frac{Ple_1}{8 \cdot 69\delta^4} \quad \text{и} \quad \sigma_2 = -\frac{Ple_2}{8 \cdot 69\delta^4}.$$

Допускаемая нагрузка P опредѣлится изъ перваго или изъ втораго уравненія, смотря по тому $\frac{\sigma_1}{e_1} \lessgtr \frac{\sigma_2}{-e_2}$, гдѣ теперь $\sigma_1 =$ *допускаемое напряженіе* на растяженіе и $\sigma_2 =$ допускаемое напряженіе на сжатіе. Если считать, что

$\sigma_1 = 250$ клгр./см.^{2} и $\sigma_2 = -500$ клгр./см.^{2}, то для даннаго случая $\frac{\sigma_1}{e_1} < \frac{\sigma_2}{-e_2}$ и P должно удовлетворить уравненію:

$$250 = \frac{Pl e_1}{8 \cdot 69\delta^4} = \frac{Pl\, 3{,}47}{8 \cdot 69\delta^3}.$$



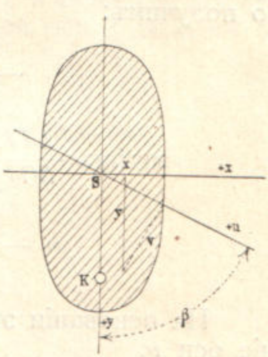
Фиг. 53.

Зная P и l, можно опредѣлить δ. Такъ напр., если $P = 1500$ клгр., $l = 300$ см., то $\delta = 2{,}25$ см.

Если выбрать ось y въ плоскости дѣйствія силъ, то напряженіе σ для какой нибудь точки сѣченія x, y можно выразить очень просто съ помощью величинъ J_x, J_y, Z_{xy}. Такъ напр., фиг. 54, разстояніе этой точки отъ оси u: $v = y \sin\beta - x\cos\beta$, а отрѣзокъ $\overline{OJ}$, фиг. 53:

$$\overline{OJ} = \overline{OJ_x} \sin\beta - \overline{J_x B} \cos\beta, \text{ откуда:}$$

$$J = J_x \sin\beta - Z_{xy} \cos\beta.$$



Фиг. 54.

Подставивъ эти значенія въ уравн. (8), получимъ:

$$\sigma = \frac{N}{F} + M \frac{y \sin\beta - x\cos\beta}{J_x \sin\beta - Z_{xy}\cos\beta} \text{ или}$$

(11) $$\sigma = \frac{N}{F} + M \frac{y - x \operatorname{cotg}\beta}{J_x - Z_{xy} \operatorname{cotg}\beta}, \text{ гдѣ}$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{Z_{xy}}{J_y}.$$

Для точки L_1 прежде разсмотрѣннаго уголка получимъ, напр.; $y = +3{,}5\delta$ $x = -1{,}5\delta$; $\operatorname{cotg}\beta = \frac{45}{41{,}25}$; $N = 0$; слѣдовательно:

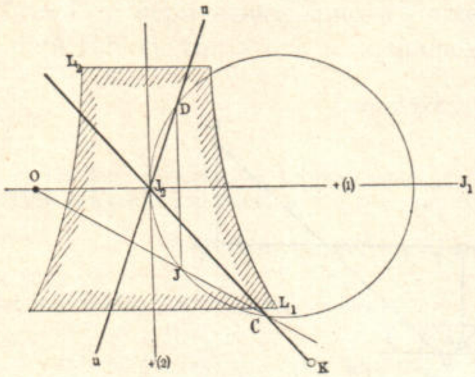
$$\sigma_1 = \frac{M}{\delta^3} \frac{3{,}5 \cdot 41{,}25 + 1{,}5 \cdot 45}{151{,}25 \cdot 41{,}25 - 45 \cdot 45} = 0{,}05028 \frac{M}{\delta^3}.$$

Раньше получили:

$$\sigma_1 = \frac{M e_1}{J} = \frac{M \cdot 3{,}47}{69\delta^3} = 0{,}05029 \frac{M}{\delta^3}.$$

Оба результата совершенно одинаковы.

41. Сѣченіе отнесено къ главнымъ осямъ. Когда сѣченіе имѣетъ ось симметріи, то его всегда относятъ къ главнымъ осямъ, проходящимъ черезъ центръ тяжести; изъ этихъ осей одна будетъ осью симметріи. Тогда точка A, фиг. 48, совпадаетъ съ точкой J_2, потому что центробѣжный моментъ относительно главныхъ осей $=$ о. Обратимся къ фиг. 55, для которой точка J_2 составляетъ центръ тяжести сѣченія, а отрѣзокъ $\overline{OJ_2} =$ моменту инерціи J_2, отрѣзокъ $\overline{OJ_1} =$ моменту инерціи J_1. Черзъ J_2K проходитъ плоскость дѣйствія силъ, J_2D представляетъ ось u. Моментъ инерціи J, входящій въ уравн. (6) до (10) изображается, отрѣзкомъ OJ.



Фиг. 55.

Обозначивъ углы, образуемые плоскостью дѣйствія силъ и осью u съ главной осью (1), буквами φ и ψ (см. фиг. 56), получимъ:

(11) $$-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{J_1}{J_2}.$$

Дѣйствительно, если на фиг. 55 провести недостающія прямыя J_1C, J_1J, JJ_2 и замѣтить, что $-\operatorname{tg}\varphi = +\operatorname{tg}\angle DJ_2J_1 = +\operatorname{tg}\angle JJ_2J_1$, то получимъ:

$$-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{\overline{J_1C}}{\overline{J_2C}} \cdot \frac{\overline{J_1J}}{\overline{J_2J}} = \frac{\Delta JJ_1C}{\Delta JJ_3C},$$

затѣмъ $$\frac{\Delta JJ_1C}{\Delta OJ_1C} = \frac{\overline{JC}}{\overline{OC}} = \frac{\Delta JJ_2C}{\Delta OJ_2C} \text{ или } \frac{\Delta JJ_1C}{\Delta JJ_2C} = \frac{\Delta OJ_1C}{\Delta OJ_2C}$$

и $$-\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = \frac{\Delta OJ_1C}{\Delta OJ_2C} = \frac{\overline{OJ_1}}{\overline{OJ_2}} = \frac{J_1}{J_2}\text{*)}.$$

На основаніи этого правила можно легко опредѣлить положеніе оси u.

По главнымъ осямъ (1) и (2) фиг. 56, отъ центра тяжести J_2 откладываемъ отрѣзки: $\overline{J_2O} = J_2$ и $\overline{J_2H} = \overline{OJ_1} = J_1$ и въ точкахъ O и H возставляемъ къ главнымъ осямъ перпендикуляры. Перпендикуляръ въ точкѣ O пересѣкаетъ линію J_2K въ точкѣ R. Отложивъ затѣмъ $HT = OR$, получимъ въ T одну точку искомой оси u, такъ какъ

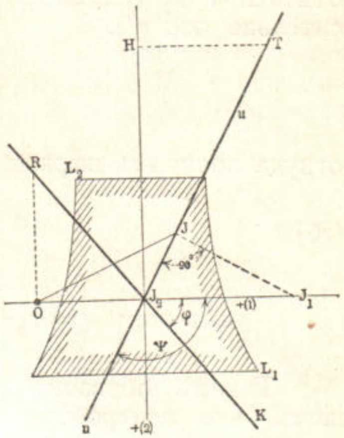
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\overline{OR}}{\overline{OJ_2}},\ \operatorname{tg}\psi = -\frac{\overline{J_2H}}{\overline{HT}} \text{ и } \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi = -\frac{\overline{J_2H}}{\overline{OJ_2}} = -\frac{J_1}{J_2}\text{**)}.$$

*) Другой выводъ этого правила помѣщенъ въ примѣчаніи къ № 44.

**) Если R (фиг. 56) находится ниже O, т. е. когда плоскость дѣйствія силъ проходитъ черезъ вторую и четвертую четверть, то точка T будетъ лѣвѣе H; ось u пройдетъ тогда въ первой и третьей четверти.

Если теперь изъ точки J_1 опустить на ось u перпендикуляръ J_1J и провести прямую OJ, то отрѣзокъ $\overline{OJ}$ представитъ моментъ инерціи J, входящій въ уравненія (6) до (10). Чтобъ убѣдиться въ этомъ, разсмотримъ фиг. 55, гдѣ $\overline{OD} = \overline{OJ}$ и $\angle J_2DJ_1 = 90^0$.

Послѣдній способъ опредѣленія оси u и значенія J можно примѣнить и къ несимметричнымъ сѣченіямъ, если только будутъ извѣстны главныя оси и главные моменты инерціи *).



Фиг. 56.

Но даже тогда, когда выбраны произвольныя оси координатъ (x,y), какъ это сдѣлано въ № 38, можно примѣнить способъ, показанный на фиг. 56, потому что вспомогательная окружность, фиг. 48, тотчасъ же даетъ положеніе главныхъ осей и опредѣляетъ величину главныхъ моментовъ инерціи **); но чтобы избѣгнуть возможныхъ ошибокъ, рекомендуется исполнять всегда оба чертежа (фиг. 48 и 56) и затѣмъ оба результата сравнить.

42. Сѣченіе отнесено къ косоугольнымъ осямъ, фиг. 57. Для нѣкоторыхъ дальнѣйшихъ изслѣдованій бываетъ удобнѣе отнести сѣченіе къ косоугольнымъ координатнымъ осямъ (u', v'), начало которыхъ лежитъ въ центрѣ тяжести S, ось v' лежитъ въ плоскости дѣйствія силъ, другая же ось u' параллельна нейтральной оси. Сдѣлаемъ въ уравн. (3) подстановку величинъ:

$$v - v' \sin\beta, \; J_u = \int v^2 dF = \sin^2\beta \int v'^2 dF \text{ и положимъ:}$$

(12) $$\int v'^2 dF = J',$$

тогда получимъ:

(13) $$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Nfv'}{J'},$$

а для крайнихъ точекъ сѣченія L_1 и L_2 (принимая во вниманіе обозначенія фиг. 57):

(14) $$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nfe'}{J'}; \; \sigma_2 = \frac{Nfe''}{J'}$$

---

*) Необходимыя данныя для нормальныхъ профилей вида ⅃_ и |_ находятся въ сочиненіи Heinzerling'а и Jntze: „Deutsche Normalprofile für Walzeisen".

**) Напомнимъ, что главныя оси (1) и (2), фиг. 48, проходящія черезъ центръ тяжести сѣченія A, проходятъ черезъ точки окружности J_1 и J_2 и что $\overline{OJ_1} = J_1$ и $\overline{OJ_2} = J_2$.

Положеніе нейтральной оси опредѣлится разстояніемъ

(15)
$$v'_0 = -\frac{J'}{Ff} = -\frac{i'^2}{f}$$

отъ оси u' и условіемъ равновѣсія (уравненіемъ моментовъ относительно оси v'):

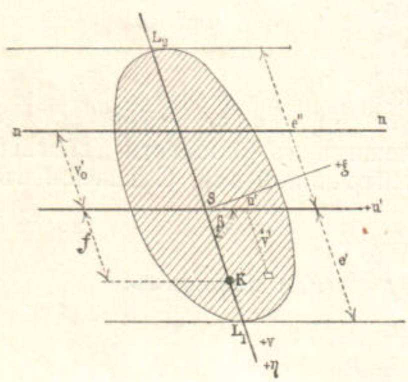
$$\int \sigma dFu' = 0,$$

откуда получимъ выраженіе:

(16)
$$\int u'v'dF = 0,$$

такъ какъ $\sigma = \sigma_0 + Bv = \sigma_0 + Bv' \sin\beta$ и $\int u' dF = 0$.

Такимъ образомъ положеніе оси u' опредѣлится тѣмъ условіемъ, что центробѣжный моментъ относительно осей (u', v') равенъ 0. Для этой цѣли надо отнести сѣченіе къ прямоугольнымъ осямъ (η, ξ), изъ которыхъ ось η лежитъ въ плоскости дѣйствія силъ, а затѣмъ уже опредѣлить моментъ инерціи J_η и центробѣжный моментъ $Z_{\eta\xi}$.



Фиг. 57.

Опредѣлимъ уголъ β по уравненію, приведенному въ № 32: $\cot g\beta = \frac{Z_{\eta\xi}}{J_\eta}$, и примѣнимъ способъ, представленный на фиг. 48 и выведенный другимъ путемъ въ № 37; но при этомъ надо замѣтить, что координаты точки C по отношенію къ прямой OO' и началу O равны $Z_{\eta\xi}$ и J_η, откуда слѣдуетъ, что $\angle OJD = \beta$.

---

§ 10.

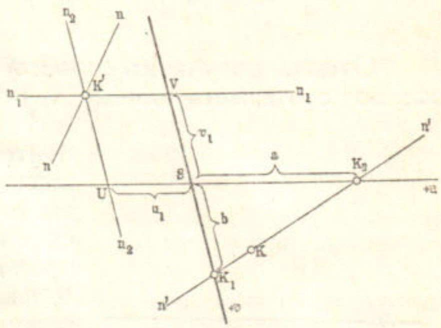
Дальнѣйшія изслѣдованія о положеніи нейтральной оси.

43. Общая зависимость между положеніями нейтральной оси и центра силъ. Отнесемъ сѣченіе къ косоугольнымъ координатнымъ осямъ (u,v), фиг. 58, изъ которыхъ одна взята произвольно, а другая опредѣляется условіемъ $Z_{uv} = 0$. Тогда каждому центру силъ K_1, лежащему на оси v, соотвѣтствуетъ нейтральная ось n_1n_1, параллельная оси u, и каждому центру силъ K_2, лежащему на оси u, соотвѣтствуетъ нейтральная ось n_2n_2, параллельная оси v, причемъ, при обозначеніяхъ на фиг. 58, должны быть удовлетворены равенства:

$$(1) \qquad bv_1 = i_u^2; \quad au_1 = i_v^2,$$

которыя получаются изъ уравн. (15) (см. № 42). Знакъ минусъ въ этомъ уравненіи можно отбросить, но при этомъ надо помнить, что центръ силъ и нейтральная ось лежатъ въ противоположныхъ сторонахъ отъ центра тяжести S.

Если разсматривать какую нибудь точку K, лежащую на прямой $n'n'$, опредѣленной произвольными точками K_1 и K_2, какъ центръ силъ, то нормальную силу N, дѣйствующую въ этой точкѣ K можно разложить на двѣ составляющихъ N_1 и N_2, которыя приложены въ K_1 и K_2. Силы N_1 и N_2 вызываютъ въ точкѣ пересѣченія K' обѣихъ прямыхъ n_1n_1 и n_2n_2 (эти прямыя будутъ нейтральными осями для точекъ K_1 и K_2) напряженіе $\sigma = 0$, а отсюда слѣдуетъ, что нейтральная ось nn, соотвѣтствующая точкѣ K проходитъ черезъ K'. Это распространяется на всѣ точки прямой $n'n'$. Итакъ, если центръ силъ описываетъ путь $n'n'$, то соотвѣтствующая нейтральная ось вращается около точки K'. И обратно:



Фиг. 58.

Если нейтральная ось вращается около неподвижной точки, координаты которой u_1 и v_1, то соотвѣтствующій центръ силъ описываетъ прямую, которая отсѣкаетъ на оси—u отрѣзокъ $a = \dfrac{i^2_v}{u_1}$ и на оси v—отрѣзокъ $b = \dfrac{i^2_u}{v_1}$.

Если точка вращенія нейтральной оси лежитъ на оси—u (т. е. $v_1 = 0$), то центръ силъ описываетъ прямую, параллельную оси v (потому что $b = \infty$); произведеніе изъ абсциссъ точки вращенія и пройденнаго пути должно при этомъ равняться i_v^2. Такимъ образомъ, если K_2 есть точка вращенія нейтральной оси, то прямая n_2n_2 представитъ путь соотвѣтствующаго центра силъ, такъ какъ $au_1 = i_v^2$, поэтому нормальная сила, дѣйствующая въ точкѣ K', вызываетъ въ точкѣ K_2 напряженіе $\sigma = 0$. Точно такимъ же путемъ можно доказать, что эта нормальная сила вызываетъ въ точкѣ K_1 также напряженіе $\sigma = 0$, а отсюда выводимъ заключеніе, *что прямая $n'n'$, опредѣляемая обѣими точками K_1 и K_2, будетъ нейтральной осью, соотвѣтствующей точкѣ K'.*

Только что выведенныя разсужденія устанавливаютъ слѣдующій важный двойной законъ:

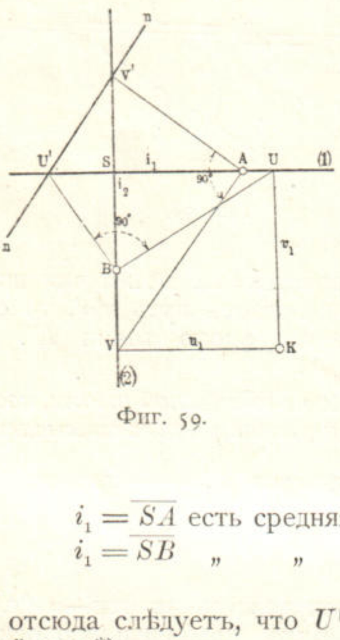
Если нейтральная ось nn описываетъ пучекъ лучей, исходящихъ изъ точки K', то центръ силъ K для этой оси движется по нейтральной оси $n'n'$, соотвѣтствующей точкѣ K'.

Если центръ силъ K движется по прямой $n'n'$, то нейтральная ось nn для этого центра описываетъ пучекъ лучей, исходящихъ изъ точки K', которая представляетъ центръ силъ, соотвѣтствующій прямой $n'n'$.

44. Опредѣленіе нейтральной оси. Изъ уравненій (1) имѣемъ (см. фиг. 58):

i_u средняя пропорціональная между v_1 и b,
i_v „ „ „ u_1 „ a.

Отсюда получаемъ простой способъ опредѣленія нейтральной оси по соотвѣтствующему центру силъ. Этотъ способъ будетъ имѣть тогда преимущество, когда требуется разрѣшить данную задачу для различныхъ положеній K; наглядность же его выясняется въ томъ случаѣ, если сѣченіе отнесено къ главнымъ осямъ, проходящимъ черезъ центръ тяжести S, фиг. 59. Опредѣлимъ сначала главные радіусы инерціи i_1 и i_2 и отложимъ на главныхъ осяхъ (1) и (2) отрѣзки $\overline{SA} = i_1$ и $\overline{SB} = i_2$ (безразлично въ какую бы то ни было сторону отъ S), соединимъ подошвы V и U координатъ u_1 и v_1 центра силъ K съ A и B и возставимъ въ A и B къ прямымъ VA и UB перпендикуляры, которые пересѣкутъ главныя оси въ точкахъ V' и U'. Тогда получимъ, что



Фиг. 59.

$i_1 = \overline{SA}$ есть средняя пропорціональная между $\overline{SV}$ и $\overline{SV'}$ и
$i_1 = \overline{SB}$ „ „ „ „ $\overline{SU}$ и $\overline{SU'}$,

а отсюда слѣдуетъ, что U' и V' принадлежатъ искомой нейтральной оси *).

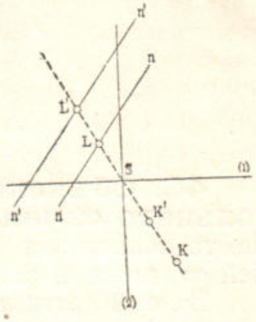
При большомъ удаленіи центра силъ K отъ центра тяжести S описанный способъ оказывается неудобнымъ. Въ подобныхъ случаяхъ для какой нибудь точки K', лежащей на прямой SK, но ближе

*) Для угла наклоненія ψ оси u, параллельной nn (см. фиг. 57), получаемъ выраженіе:

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{\overline{SV'}}{\overline{SU'}} = -\frac{i_1^2}{v_1}\frac{u_1}{i_2^2} = -\frac{J_1}{J_2}\frac{u_1}{v_2} = -\frac{J_1}{J_2}\operatorname{cotg}\varphi,$$

гдѣ $\varphi = \angle KSU$. Отсюда уже получимъ уравненіе (11), см. № 41.

къ S, опредѣляютъ нейтральную ось $n'n'$ (фиг. 60). Тогда линія nn, соотвѣтствующая точкѣ K, будетъ параллельна $n'n'$ и кромѣ того будетъ существовать отношеніе: $\overline{SL} : \overline{SL'} = \overline{SK'} : \overline{SK}$, гдѣ L и L'представляютъ точки пересѣченія линіи SK съ нейтральными осями nn и $n'n'$. Если точка K лежитъ въ безконечности, то nn проходитъ черезъ центръ тяжести, причемъ nn остается параллельной $n'n'$. Этотъ случай имѣетъ мѣсто тогда, когда N=0 и на сѣченіе дѣйствуетъ только изгибающій моментъ M.



Фиг. 60.

Разрѣшеніе обратной задачи, по данной нейтральной оси nn отыскать центръ силъ K, не требуетъ объясненій.

Опредѣленіе нейтральной оси по только что описанному способу впервые сдѣлано было Моромъ (Mohr).

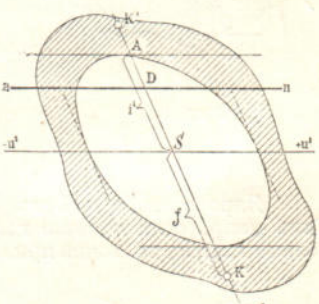
45. Опредѣленіе нейтральной оси съ помощью теоріи поляръ. Когда проведемъ черезъ центръ тяжести сѣченія S прямую $u'u'$ параллельную нейтральной оси nn, соотвѣтствующей какому нибудь центру силъ K, фиг. 61, то центробѣжный моментъ сѣченія относительно осей SK и $u'u'$, по № 42, равняется 0, а отсюда, на основаніи № 32, слѣдуетъ, что направленія SK и $u'u'$ для центральнаго эллипса будутъ сопряженными.

Касательныя къ центральному эллипсу, проведенныя въ A и B точкахъ пересѣченія плоскости дѣйствія силъ съ эллипсомъ, будутъ параллельны линіи nn.

Полуось эллипса $\overline{SA} = \overline{SB}$, совпадающая съ плоскостью дѣйствія силъ, равна радіусу инерціи i сѣченія относительно оси u', а ордината нейтральной оси $\overline{SD} = \frac{i'^2}{f}$. Если теперь въ плоскости дѣйствія силъ опредѣлить точку K', которая лежитъ симметрично точкѣ K относительно центра тяжести S, то точки A и B отдѣлятся точками K' и D гармонически, а отсюда слѣдуетъ, что нейтральная ось (проходящая черезъ безконечно удаленную точку пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ къ центральному эллипсу въ точкахъ A и B), будетъ *полярой точки K' относительно центральнаго эллипса.*

Для поляры же точки относительно кривой втораго порядка имѣется слѣдующій законъ:

Если изъ какой нибудь точки K' провести къ кривой втораго порядка произвольное число сѣкущихъ и на каждой сѣкущей опредѣлить точку D, которая дѣлится точками кривой A и B гармонически, то всѣ точки D лежатъ на прямой, называемой полярой точки K' относительно этой кривой втораго порядка, и на которой находится точка пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ къ кривой въ точкахъ A и B произвольной сѣкущей.



Фиг. 61.

Изъ слѣдующихъ главныхъ законовъ теоріи поляръ:

Поляры всѣхъ точекъ прямой проходятъ черезъ полюсъ этой прямой,	*Полюсы всѣхъ лучей точки лежат на полярахъ этой точки,*

получается непосредственно двойной законъ, доказанный въ № 44.

Нейтральную ось называютъ также *антиполярой* центра силъ и обратно центръ силъ называютъ *антиполюсомъ* нейтральной оси.

Опредѣленіе антиполяры nn представляетъ простую задачу, рѣшеніе которой согласуется съ данными № 44; это рѣшеніе состоитъ въ проведеніи нейтральной оси помощью антиполюсовъ (U' и V' на фиг. 59) двухъ прямыхъ (KU и KV) лежащихъ на нейтральной оси; прямыя же эти проходятъ черезъ центръ силъ K и параллельны какимъ нибудь двумъ сопряженнымъ относительно центральнаго эллипса направленіямъ (напр., главнымъ осямъ, проходящимъ черезъ цетръ тяжести).

---

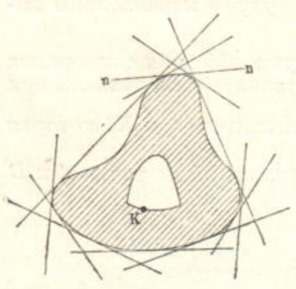
§ 11.

Ядро сѣченій.

46. Объясненія. Опредѣленіе ядра для произвольнаго сѣченія. Если нейтральная ось nn пересѣкаетъ сѣченіе, то напряженія σ въ двухъ частяхъ сѣченія, раздѣленнаго линіей nn, имѣютъ различные знаки.

Въ той части, которая содержитъ центръ силъ K, вызываются растяженія или сжатія, смотря по тому будетъ ли нормальная сила, дѣйствующая въ K, положительная или отрицательная.

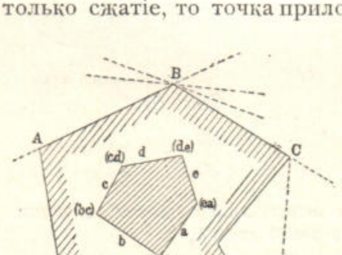
Когда центръ силъ приближается къ центру тяжести S сѣченія, то нейтральная ось удаляется отъ S. Въ то мгновеніе когда нейтральная ось во время этого движенія коснется сѣченія, не пересѣкая его, то напряженія σ во всѣхъ точкахъ сѣченія будутъ того же знака, что и нормальная сила N.



Фиг. 62.

Если теперь всѣ прямыя, касательныя къ сѣченію, но *его не пересѣкающія*, разсматривать какъ нейтральныя оси и опредѣлить для нихъ (лучше всего по § 10) соотвѣтствующіе центры силъ, то мѣста этихъ точекъ ограничатъ ту часть сѣченія, внутри которой должна лежать точка приложенія нормальной силы (центръ силъ), для того случая, когда напряженія вызываемыя въ сѣченіи, должны быть одного знака съ силой N. Эта часть сѣченія называется *ядромъ*, касательныя же къ сѣченію, но не пересѣкающія его даютъ *обертывающую кривую* сѣченія.

Ядро сѣченія имѣетъ значеніе при изслѣдованіи каменныхъ сооруженій. Такъ напр., если сѣченіе какой нибудь каменной опоры должно испытывать только сжатіе, то точка приложенія силы N должна лежать внутри ядра сѣченія.



Фиг. 63.

Для отысканія ядра сѣченія, ограниченнаго прямыми линіями (фиг. 63), надо стороны AB, BC, CD, DE, EA обертывающей линіи $ABCDEA$ принять по порядку за нейтральныя оси и опредѣлить для нихъ соотвѣтствующіе центры силъ (ab), (bc), (cd), (de), (ea). Линіи a, b, c, d, e, соединяющія эти точки, образуютъ ядро. Потому что въ то время какъ нейтральная ось, вращаясь около точки B, переходитъ изъ положенія AB въ положеніе BC, центръ силъ описываетъ линію b, соединяющую точки (ab) и (bc); если нейтральная ось изъ положенія BC переходитъ въ положенie CD, повернувшись около точки C, то центръ силъ опишетъ прямую c и т. д.

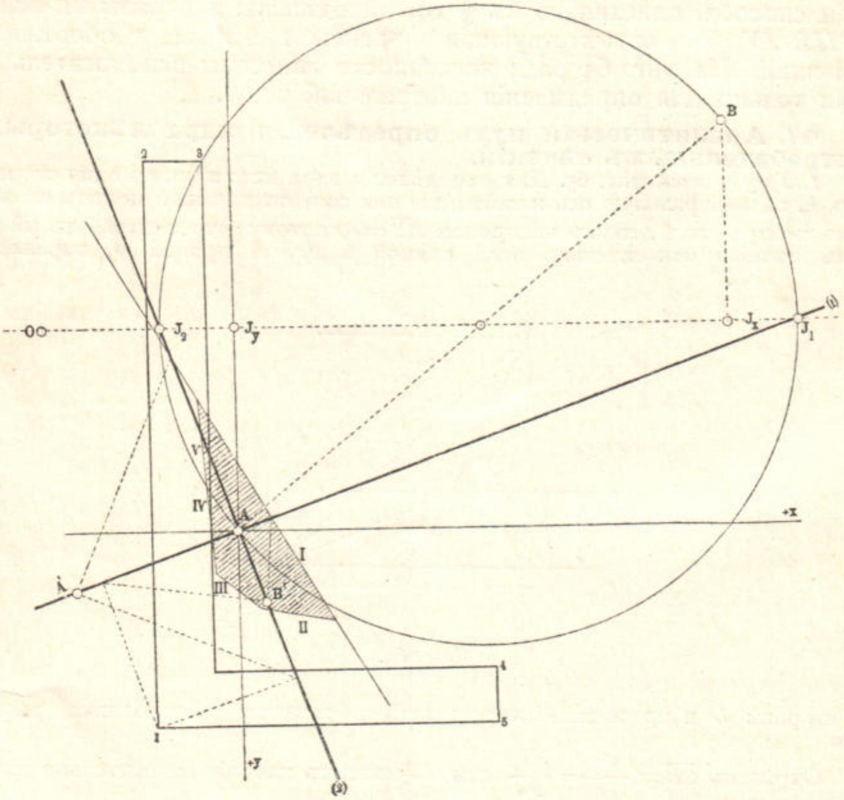
Но раньше было доказано, что при вращенiи нейтральной оси около неподвижной точки соотвѣтствующiй ей центръ силъ движется по нейтральной оси, соотвѣтствующей этой точкѣ вращенiя, а отсюда слѣдуетъ, что ядро можно опредѣлить построенiемъ нейтральныхъ осей a, b, c, d, e, соотвѣтствующихъ точкамъ A, B, C, D, E.

Предыдущее разсужденie можно распространить и на сѣченiя, ограниченныя кривыми линiями, на которыя можно смотрѣть какъ на рядъ безконечно малыхъ участковъ прямыхъ линiй; поэтому относительно ядра можно высказать слѣдующiй двойной законъ:

Если нейтральная ось перемѣщается по обертывающей линiи сѣченiя, то центръ силъ описываетъ контуръ ядра.

Если центръ силъ описываетъ обертывающую линiю сѣченiя, то нейтральная ось перемѣщается по контуру ядра.

Приложимъ описанный способъ отысканiя ядра къ угловому сѣченiю, размѣры котораго даны были на фиг. 44; на фиг. 64 мас-



Фиг. 64.

штабъ составляетъ : $10\,\delta = 75$ мм. A — есть центръ тяжести сѣченiя. Построимъ сначала вспомогательный кругъ AB съ помощью значенiй, опредѣленныхъ въ № 33:

$$J_x = 151{,}25\,\delta^4;\ J_y = 41{,}25\,\delta^4;\ Z_{xy} = 45\,\delta^4,$$

причемъ на фиг. 64 масштабъ для моментовъ инерцiи выбранъ $100\delta^4 = 60$ мм.; такимъ образомъ отложено:

$$\overline{OJ_x} = J_x = \frac{6}{10} \cdot 151{,}25 \text{ мм.} = 90{,}75 \text{ мм.}; \ \overline{OJ_y} = J_y = 24{,}75 \text{ мм.};$$

$$\overline{J_y A} = \overline{J_x B} = 27{,}0 \text{ мм.}$$

Затѣмъ найдемъ: $\overline{OJ_1} = 100{,}0$ мм.; $\overline{OJ_2} = 15{,}5$ мм.; кромѣ того:

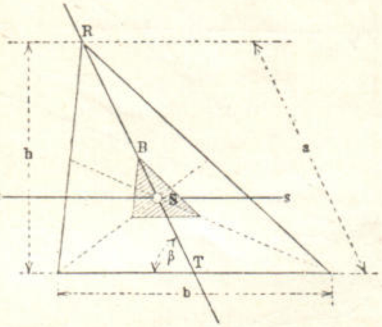
$$J = \frac{100{,}0 \cdot 10}{6} \delta^4 = 166{,}7\,\delta^4; \ J_2 = 25{,}8\,\delta^4 \text{ и, такъ какъ } F = 15\,\delta^2, \text{ то:}$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{J_1}{F}} = 3{,}33\delta; \ i_2 = \sqrt{\frac{J_2}{F}} = 1{,}31\,\delta.$$

На главныхъ осяхъ (1) и (2), проходящихъ черезъ точки J_1 и J_2, отложены отрѣзки: $\overline{AA'} = i_1$ и $\overline{AB'} = i_2$, а затѣмъ уже, на основанiи способа, описаннаго въ § 10, опредѣлены нейтральныя оси *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*, соотвѣтствующiя точкамъ 1, 2, 3, 4, 5 обертывающей линiи. На фиг. 64 ради наглядности нанесены вспомогательныя линiи только для опредѣленiя нейтральной оси I.

47. Аналитическiй путь опредѣленiя ядра нѣкоторыхъ употребительныхъ сѣченiй.

1. *Треугольникъ*, фиг. 65. Для опредѣленiя ядра надо принять одну сторону напр. *b*, за нейтральную ось и найти для нея соотвѣтствующiй центръ силъ этотъ центръ силъ лежитъ на прямой $\overline{RT} = a$, потому что центробѣжный моментъ сѣченiя относительно этой прямой и другой прямой *ss*, параллель-



Фиг. 65.

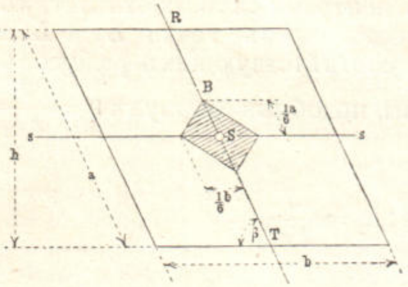
ной сторонѣ *b* и проходящей черезъ центръ тяжести треугольника, равенъ нулю.

Отрѣзокъ $\overline{SB} = \frac{i^2}{\frac{1}{3}a} = \frac{3J'}{Fa}$, гдѣ J'—моментъ инерцiи относительно оси *ss* сѣченiя, отнесеннаго къ косоугольнымъ координатамъ. Въ № 26, *b* было опредѣлено для прямоугольныхъ координатъ относительно оси *ss*. $J = \frac{bh^3}{36} = \frac{ba^3 \sin^3\beta}{36}$, отсюда (по уравн. 10 въ № 32) слѣдуетъ:

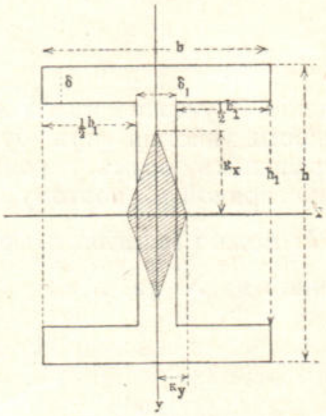
$$J' = \frac{J}{\sin^2\beta} = \frac{ba^3 \sin\beta}{36}; \text{ а такъ какъ } F = \frac{ba \sin\beta}{2}$$

то $\overline{SB} = \frac{a}{6}$. Опредѣливъ подобнымъ же путемъ точки ядра, соотвѣтствующія остальнымъ сторонамъ треугольника, увидимъ, что искомое ядро будетъ треугольникъ, стороны котораго параллельны сторонамъ сѣченія и центръ тяжести котораго совпадаетъ съ центромъ тяжести сѣченія.

2. *Параллелограммъ*, фиг. 66. За координатныя оси выберемъ прямыя проходящія черезъ центръ тяжести и параллельныя сторонамъ a и b; этимъ осямъ соотвѣтствуетъ центробѣжный моментъ $Z = 0$. Сдѣлавъ b нейтральною осью, найдемъ, что центръ силъ B будетъ лежать на прямой RT, равнодѣлящей стороны b, на разстояніи $\overline{SB} = \frac{i'^2}{\frac{1}{2}a} = \frac{2J'}{Fa}$ отъ центра тяжести S. Но по № 26 a относительно оси ss и для прямоугольныхъ координатъ: $J = \frac{bh^3}{12} = \frac{ba^3 sin^3\beta}{12}$, кромѣ того $J' = \frac{J}{sin^2\beta} = \frac{ba^3 sin\beta}{12}$. Затѣмъ $F = bh = basin\beta$, слѣдовательно $\overline{SB} = \frac{a}{6}$. Подобнымъ же путемъ можно опредѣлить точки ядра, соотвѣтствующія остальнымъ сторонамъ параллелограмма. Ядро будетъ параллелограммъ, углы котораго будутъ лежать на выбранныхъ осяхъ координатъ, а діагонали его будутъ равны $\frac{1}{3}a$ и $\frac{1}{3}b$.



Фиг. 66.



Фиг. 67.

3. *Сѣченіе* ⊥, фиг. 67. Для главныхъ осей xx, yy находимъ:

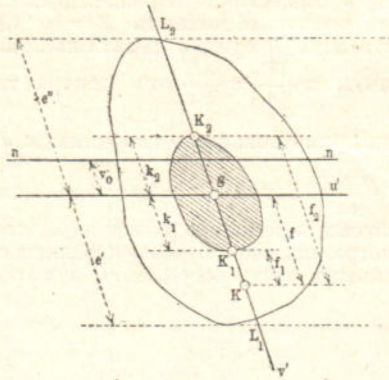
$$J_x = \frac{1}{12}(bh^3 - b_1h_1^3);\quad J_y = \frac{1}{12}(2\delta b^3 + h_1\delta_1^3).$$

Площадь сѣченія $F = bh - b_1h_1$. Ядро сѣченія будетъ параллелограммъ, углы котораго лежатъ на главныхъ осяхъ, а полудіагонали равны:

$$k_x = \frac{i_x^2}{\frac{1}{2}h} = \frac{2J_x}{Fh} \text{ и } k_y = \frac{2J_y}{Fb}.$$

48. Опредѣленіе напряженій помощью ядра сѣченія. Отнесемъ сѣченіе, на которое въ точкѣ K дѣйствуетъ нормальная сила N, къ кординатнымъ осямъ, изъ которыхъ одна u' проходитъ черезъ центръ тяжести параллельно нейтральной оси, а другая SK соединяетъ центръ силъ съ центромъ тяжести. Напряженія σ_1 и σ_2 въ точкахъ L_1 и L_2, наиболѣе удаленныхъ отъ оси u', можно опредѣлить по формуламъ № 42:

(1) $$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{Nfe'}{J'};\ \sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{Nfe'}{J'},$$



Фиг. 68.

(значеніе J' указано въ № 42). Точки ядра K_1 и K_2, лежащія въ плоскости дѣйствія силъ, будутъ центрами силъ, соотвѣтствующими нейтральнымъ осямъ, проведеннымъ чрезъ точки L_1 и L_2 параллельно прямой u'; поэтому для соотвѣтствующихъ радіусовъ ядра k_1 и k_2 можно примѣнить формулы, подобныя формулѣ $f = \frac{J'}{Fv_0}$, выведенной въ № 42, т. е.:

(2) $$k_2 = \frac{J'}{Fe'};\ k_1 = \frac{J}{Fe''}$$

откуда получаемъ:

$$\frac{J'}{e'} = Fk_2;\ \frac{J'}{e''} = Fk_1.$$

Уравненія (1), послѣ подстановки въ нихъ этихъ значеній, обратятся въ слѣдующія:

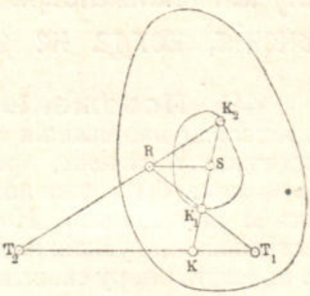
(3) $$\sigma_1 = \frac{N}{F} \cdot \frac{f + k_2}{k_2};\ \sigma_2 = -\frac{N}{F} \cdot \frac{f - k_1}{k_1},$$

затѣмъ можно написать:

(4) $$\sigma_1 = \frac{N}{F} \cdot \frac{f_2}{k_2};\ \sigma_2 = -\frac{N}{F} \cdot \frac{f_1}{k_1},$$

гдѣ f_1 и f_2 обозначаютъ разстоянія центра силъ отъ точекъ ядра K_1 и K_2, лежащихъ въ плоскости дѣйствія силъ.

Когда ядро сѣченія задано, то напряженія σ_1 и σ_2 опредѣлятся по уравн. (4), причемъ нѣтъ необходимости отыскивать направленіе нейтральной оси и крайнихъ точекъ сѣченія L_1 и L_2. Если требуется найти σ_1 и σ_2 графически, причемъ напряженіе $\sigma_0 = \frac{N}{F}$, существующее въ центрѣ тяжести S, уже опредѣлено, то на какой нибудь прямой, проходящей черезъ S, откладываютъ $\sigma_0 = SR$, фиг. 69, черезъ K проводятъ прямую параллельно SR и затѣмъ изъ R и черезъ K_1 и K_2 проводятъ прямыя до пересѣченія ихъ съ предыдущей прямой въ точкахъ T_1 и T_2. Тогда получимъ: $\sigma_1 = \overline{KT_2}$ и $\sigma_2 = \overline{KT_1}$.



Фиг. 69.

Иногда задаются величины моментовъ $M_1 = Nf_1$ и $M_2 = Nf_2$ относительно точекъ ядра K_1 и K_2, причемъ N, f_1 и f_2 отдѣльно не заданы. Тогда напряженія σ_1, σ_2 опредѣляютъ (лучше всего вычисленіемъ) изъ формулъ:

$$(5) \qquad \sigma_1 = \frac{M_2}{Fk_2}\,; \quad \sigma_2 = -\frac{M_1}{Fk_1}\,,$$

которыя имѣютъ большое значеніе въ теоріи арочныхъ мостовъ.

Примѣненіе ядра сѣченія при опредѣленіи напряженій σ имѣетъ только тогда преимущество передъ способомъ, приведеннымъ въ § 9, когда можно легко вычертить ядро сѣченія или же когда требуется сравнить наибольшія напряженія σ_1 и σ_2 для различныхъ положеній центра силъ.

Если, напр., сѣченіе при перемѣнномъ положеніи центра силъ будетъ находиться подъ дѣйствіемъ постоянной нормальной силы N и постояннаго момента, которые могутъ быть оба положительными, то напряженіе $\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fk_1}$ приметъ наибольшее или наименьшее значеніе, смотря по тому съ наименьшимъ или съ наибольшимъ радіусомъ ядра совпадаетъ плоскость дѣйствія силъ. Для параллелограмма, фиг. 66. напряженіе σ_1 будетъ наибольшимъ, если плоскость дѣйствія силъ SK будетъ перпендикулярна къ сторонѣ ядра, ближайшей къ точкѣ S, и будетъ наименьшимъ, если SK совпадаетъ съ длинною діагональю ядра. Вообще, при постоянномъ N и M находимъ:

$$\sigma_{1max} = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fk_{min}}\,; \quad \sigma_{1min} = \frac{N}{F} + \frac{M}{Fk_{max}}\,.$$

Кульманъ и Винклеръ впервые воспользовались точками ядра при расчетѣ напряженій σ для случая, когда плоскость дѣйствія силъ совпадаетъ съ главной осью; общую же примѣнимость уравненій (4) доказалъ впервые W. Ritter (Zürich).

§ 12.

Случай сжимающихъ усилій, приложенныхъ внѣ ядра сѣченія, когда не допускаются растягивающія усилія.

49. Положеніе нейтральной оси. До сихъ поръ мы опредѣляли напряженія σ для того случая, когда нейтральная ось пересѣкаетъ сѣченіе, причемъ предполагалось, что продольное усиліе можетъ быть уравновѣшено напряженіями какъ растягивающими, такъ и сжимающими. Но можетъ также представиться случай, когда растягивающія усилія не допускаются, напр., когда стержень опирается на плоскую опору своимъ конечнымъ сѣченіемъ, но съ ней не связанъ. Если при этомъ центръ силъ K, или точка приложенія давленія N на сѣченіе опоры лежитъ внѣ ядра, то нейтральная ось nn раздѣляетъ сѣченіе на 2 части, изъ которыхъ одна, содержащая точку K, получаетъ только сжимающія напряженія, другая же часть совсѣмъ не напряжена.

Подобный случай можетъ представиться напр., при распредѣленіи давленія N по одну сторону сѣченія, отсѣкаемаго нейтральною осью, въ каменномъ устоѣ, причемъ мы предполагаемъ, что кладка не можетъ сопротивляться растяженію; это, конечно, не согласуется съ дѣйствительностью, но подобныя предположенія вполнѣ допустимы, такъ какъ для сжимающихъ напряженій получаются значенія нѣсколько большія, чѣмъ то слѣдовало бы въ дѣйствительности.

Обозначимъ разстояніе между центромъ силъ K и нейтральною осью nn буквою f, фиг. 70, а разстояніе между осью nn и безконечно узкой полоскою сѣченія dF, параллельной nn, буквой x. Одинаковое во всѣхъ точкахъ этой полоски сжимающее напряженіе (въ этомъ § мы считаемъ его положительнымъ) обозначимъ буквой σ; тогда оба уравненія, въ предположеніи отсутствія сопротивленія растяженію, могутъ быть выражены такъ:

1) Сумма силъ σdF равна давленію N,

2) Сумма моментовъ силъ σdF относительно оси nn равна моменту Nf давленія N:

$$N=\int\sigma dF \text{ и } Nf=\int x\sigma dF, \tag{1}$$

причемъ интегралы распространяются только на ту часть сѣченія, отдѣляемаго нейтральною осью, которая содержитъ въ себѣ центръ силъ K.

Сжимающее усиліе σ слѣдуетъ закону: $\sigma=Cx$, гдѣ C—постоянная, получаемая изъ ур. (1).

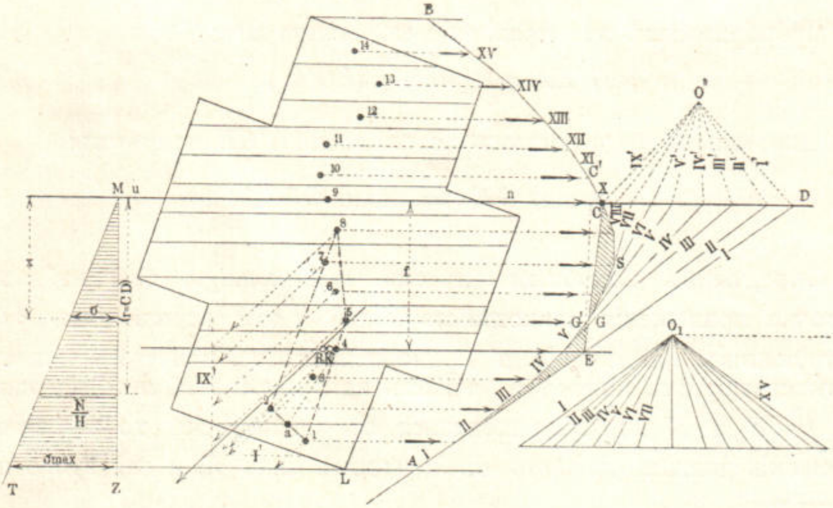
Имѣемъ: $N=C\int xdF$, а отсюда:

$$C=\frac{N}{\int xdF} \text{ и } \sigma=\frac{Nx}{\int xdF}; \tag{2}$$

а затѣмъ изъ втораго уравн. (1):

$$(3) \qquad f = \frac{\int Cx^2 dF}{N} = \frac{\int x^2 dF}{\int x dF}.$$

Числитель найденной дроби представляетъ моментъ инерціи, а знаменатель — статическій моментъ сжатой части площади относительно оси nn. Эти величины можно опредѣлить съ помощью веревочнаго многоугольника.



Фиг. 70.

Для этого разбиваютъ все сѣченіе на рядъ узкихъ полосъ, параллельныхъ нейтральной оси, величину площадей этихъ полосъ принимаютъ за силы, дѣйствующія по направленію nn, строятъ для этихъ силъ при произвольномъ полюсномъ разстояніи H (что выражаетъ собой величину площади) веревочный многоугольникъ $AGCB$ и измѣряютъ отрѣзокъ $CD = r$, получившійся при пересѣченіи оси nn веревочнымъ многоугольникомъ и продолженнымъ первымъ бокомъ AD*). Искомый статическій моментъ (по № 15—17) $= Hr$, а искомый моментъ инерціи $= 2H\mathfrak{F}$ (по ур. (1) въ № 21), гдѣ подъ $\mathfrak{F}$ подразумѣваемъ величину площади $AGCDA$, заключенной между веревочнымъ многоугольникомъ и прямыми CD и DA. Уравн. (3) преобразовывается теперь въ $f = \frac{2\mathfrak{F}}{r}$, а отсюда получимъ $\frac{fr}{2} = \mathfrak{F}$, т. е.

$$(4) \qquad \Delta BCD = \mathfrak{F},$$

*) Хотя полосы сѣченія взяты конечной ширины, тѣмъ не менѣе въ дальнѣйшемъ изложеніи мы сохранимъ для площади полосы обозначеніе dF. На фиг. 70 веревочный многоугольникъ слѣдовало бы замѣнить вписанной цѣпной линіей, что не сдѣлано ради отчетливости чертежа.

гдѣ E есть точка пересѣченія перваго бока веревочнаго многоугольника съ прямой, проходящей черезъ точку K параллельно оси nn. Изъ уравн. (4) слѣдуетъ, что величины обѣихъ площадей AEG и GSC, заштрихованныхъ на фиг. 70, равновелики, поэтому легко уже будетъ отыскать соотвѣтствующую данному центру силъ K нейтральную ось, *направленіе которой должно быть во всякомъ случаѣ дано;* для этого послѣ построенія веревочнаго многоугольника и по опредѣленіи точки E проводятъ прямую EC такъ, чтобъ получилось требуемое равенство площадей. Этого можно достигнуть попытками или же просто проведеніемъ на глазъ прямой EC' и нахожденіемъ точки C при томъ условіи, чтобъ:

$$\Delta EC'C = \text{площ. } C'SG' - \text{площ. } G'EA.$$

Преобразовавъ это уравненіе въ слѣдующее:

$$G'EA = C'SG' - \Delta EC'C \text{ и}$$

прибавивъ къ обѣимъ частямъ по площади $G'GE$ получимъ:

$$\text{площ. } GEA = \text{площ. } GSC.$$

Опредѣливъ подобнымъ путемъ нейтральную ось, найдемъ, что точка приложенія равнодѣйствующей $\int \sigma dF$ всѣхъ силъ σdF, дѣйствующихъ на сѣченіе и приложенныхъ къ центрамъ тяжести соотвѣтствующихъ полосокъ, лежитъ на прямой KE, но такъ какъ силы $\int \sigma dF$ и N должны находиться въ равновѣсіи, то эта точка приложенія должна совпасть съ центромъ силъ K, а для этого необходимо,

> чтобъ равнодѣйствующая $\int \sigma dF$ силъ σdF, *взятыхъ въ плоскости сѣченія по какому нибудь направленію,* пересѣкала прямую KE въ точкѣ K.

Если этого не случится, то надо выбрать другое направленіе для нейтральной оси и вновь повторить все построеніе.

При отыскиваніи этой равнодѣйствующей надо выразить давленія $\sigma dF = CxdF$ пропорціональными имъ отрѣзками $\frac{xdF}{H}$, которые отсѣкаются на прямой nn боками веревочнаго многоугольника $AGSC$ (по № 20). Такимъ образомъ, если выбрать полюсъ O', провести лучи I', II', III' . . . , потомъ повернуть многоугольникъ силъ CD вмѣстѣ съ лучами O такъ, чтобъ CD было параллельно принятому направленію давленій σdF, и затѣмъ построить соотвѣтствующій веревочный многоугольникъ I', II', III' . . . . , то точка пересѣченія крайнихъ боковъ (I' и IX') его будетъ принадлежать продолженной равнодѣйствующей силѣ. На фиг. 70 сдѣлано упомянутое вращеніе многоугольника силъ. Силы σdF проведены подъ угломъ 45^0 къ прямой CD, а бока веревочнаго многоугольника I', II', III' . . . . проведены подъ угломъ 45^0 къ соотвѣтствующимъ лучамъ веревочнаго многоугольника (на чертежѣ, чтобъ не затемнять его, проведены только лучи I', и IX'). Точка пересѣченія R

равнодѣйствующей $\int \sigma dF$ съ прямой KE лежитъ такъ близко отъ точки K, что прямую nn можно принять съ достаточною точностью за нейтральную ось, соотвѣтствующую центру силъ K.

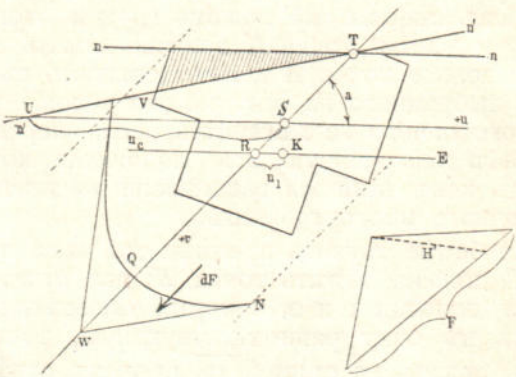
Остается еще установить выборъ направленія нейтральной оси nn. Это направленіе опредѣляется вообще путемъ опыта, а потому, принявъ какое нибудь произвольное направленіе nn, необходимо быстро рѣшить важный вопросъ, можетъ ли данный центръ силъ K совпасть съ точкой R. Если соединить для этой цѣли центры тяжести сжатыхъ полосъ сѣченія многоугольникомъ (на фиг. 70 показано пунктиромъ), не имѣющимъ входящихъ угловъ, причемъ многоугольникъ заключаетъ всѣ центры тяжести, не лежащіе на многоугольникѣ, то точка приложенія равнодѣйствующей R всѣхъ нагрузокъ сѣченія σdF лежитъ внутри этого многоугольника, а поэтому и данная точка K должна лежать внутри многоугольника, если только точка K должна совпасть съ точкой R. Для направленія nn, выбраннаго на фиг. 70, это условіе удовлетворено, а вслѣдствіе этого ничего не измѣнится, если передвинуть параллельно самой себѣ нейтральную ось, положеніе которой сначала неизвѣстно, такъ какъ выборъ направленія nn предшествуетъ построенію веревочнаго многоугольника.

Можно еще болѣе съузить предѣлы той части сѣченія, фиг. 70, внутри которой должна лежать точка K; для этого нагрузки σdF, дѣйствующія на полоски 1 и 2, которыя обозначимъ буквами P_1 и P_2, соединимъ въ одну равнодѣйствующую, точка приложенія которой будетъ лежать на прямой $\overline{12}$, причемъ отрѣзки этой прямой опредѣлятся изъ пропорціи: $\overline{1a} : \overline{2a} = P_2 : P_1$. Нагрузки P_1 и P_2 пропорціональны статическимъ моментамъ соотвѣтствующихъ площадокъ относительно оси nn. Обозначимъ разстоянія центровъ тяжести 1 и 2 отъ прямой nn буквами x_1 и x_2 и обратимъ площадки 1 и 2 въ прямоугольники, которые при произвольныхъ равныхъ основаніяхъ имѣли бы высоты z_1 и z_2, тогда получимъ: $P_2 : P_1 = \frac{x_2 z_2}{c} : \frac{x_1 z_1}{c}$, гдѣ c означаетъ длину произвольно выбраннаго отрѣзка.

Отрѣзки $\frac{x_2 z_2}{c}$ и $\frac{x_1 z_1}{c}$ легко опредѣлить чертежемъ, послѣ чего можно будетъ найти положеніе точки a. Когда это сдѣлано, то замѣняютъ стороны многоугольника $\overline{41}$, $\overline{12}$, $\overline{27}$, фиг. 70, сторонами $\overline{4a}$ и $\overline{a7}$ и тогда получается значительно меньшая площадь, внутри которой должна лежать точка K, если требуется совмѣщеніе ея съ точкой R.

Если, не смотря на всю тщательность выбора направленія nn, получается неудовлетворительное совмѣщеніе точекъ K и R, тогда надо будетъ повернуть нейтральную ось въ новое положеніе nn' (фиг. 71); причемъ рекомендуется сначала *сохранить неизмѣнной* величину площади F — части сѣченія, ограниченной осью nn, а въ площади, заштрихованной на фиг. 71, допустить растягивающія усилія. Опредѣлимъ центръ тяжести S площади F (замѣтимъ при этомъ, что линія, проходящая черезъ центръ тяжести параллельно прямой KE, можетъ быть опредѣлена помощью веревочнаго многоугольника $AGCB$, построеннаго раньше на фиг. 70), затѣмъ соединимъ точки

R и S прямой, которая представитъ слѣдъ плоскости дѣйствія силъ, соотвѣтствующей нейтральной оси nn. Отнесемъ сѣченіе F къ косоугольнымъ координатнымъ осямъ (u, v), изъ которыхъ одна ось u, проходящая черезъ S, параллельна nn, а другая ось v совпадаетъ съ прямой RS; тогда центробѣжный моментъ $\int uvdF = 0$; а на основаніи § 10 слѣдуетъ, что при переходѣ точки R въ положеніе K нейтральная ось вмѣстѣ съ линіей RS, вращаясь около точки пересѣченія ихъ T, приметъ такое положеніе $n'n'$, что отрѣзокъ $\overline{SU}$ будетъ равняться $u_c = \frac{i_r^2}{u_1}$, гдѣ $u_1 = \overline{RK}$. Моментъ инер-



Фиг. 71.

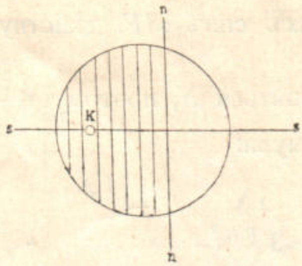
ціи $J_r = Fi_r^2$ относительно оси v можно опредѣлить проще всего по способу Мора. Для этого раздѣлимъ на части площадь F хордами, параллельными оси v; величины этихъ площадокъ примемъ за силы, дѣйствующія параллельно оси $-v$; построимъ веревочный многоугольникъ NQV при полюсномъ разстояніи H', измѣренномъ по направленію оси u, причемъ оно взято $= \frac{1}{2} F$, и затѣмъ опредѣляемъ величину площади $\mathfrak{F}'$, заключающейся между веревочнымъ многоугольникомъ и двумя крайними касательными NW и VW. На основаніи № 21 находимъ:

$$J_r = \frac{2H'\mathfrak{F}'}{\sin\alpha} = \frac{F\mathfrak{F}'}{\sin\alpha} \text{ и отсюда } i_r^2 = \frac{\mathfrak{F}'}{\sin\alpha},$$

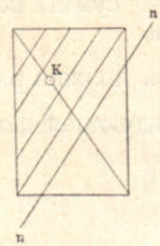
гдѣ α — уголъ, образуемый двумя осями u и v. По пріему, приведенному въ № 27, величину площади $\mathfrak{F}'$ можно представить въ видѣ: $2\mathfrak{F}' = a_2 n$, причемъ произвольный отрѣзокъ $a_2 = \varepsilon u_1 \sin\alpha$, гдѣ ε — произвольное число; такимъ образомъ получимъ $u_c = \frac{\varepsilon}{2} n$.

Когда прямая $n'n'$ проведена, то построеніе, сдѣланное на фиг. 70, надо повторить при улучшенномъ положеніи нейтральной оси.

Иногда бываетъ возможнымъ сразу дать точное положенiе нейтральной оси. А именно, если изслѣдуемое сѣченiе имѣетъ ось симметрiи *ss*, фиг. 72, и центръ силъ K лежитъ внутри сѣченiя, то ней-



Фиг. 72.



Фиг. 73.

тральная ось будетъ перпендикулярна къ оси *ss*. Центры тяжести всѣхъ хордъ, параллельныхъ линiи *nn* лежатъ на прямой *ss*.

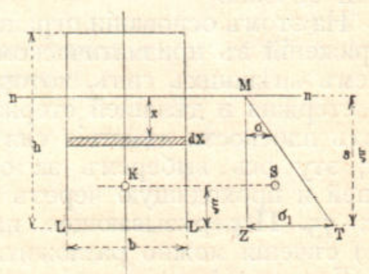
Точно также для центра силъ, лежащаго на одной дiагонали прямоугольника, фиг. 73, соотвѣтствующая нейтральная ось будетъ параллельна другой дiагонали.

50. Опредѣленiе сжимающихъ напряженiй σ. Изъ уравненiя (2), выведеннаго въ № 49, получимъ выраженiе для сжимающаго напряженiя:

$$\sigma = \frac{N}{H}\frac{x}{r}, \tag{4}$$

причемъ $\int x dF = Hr$, гдѣ $r =$ отрѣзку CD на фиг. 70; поэтому напряженiе въ разстоянiи $x = r$ отъ нейтральной оси: $\sigma = \frac{N}{H}$. Этимъ значенiемъ можно опредѣлить на фиг. 70 положенiе прямой MT, ординаты которой, взятыя относительно оси x, перпендикулярной къ нейтральной оси, представятъ сжимающiя напряженiя; крайней точкѣ сѣченiя L будетъ соотвѣтствовать напряженiе σ_{max}. Для произвольнаго полюснаго разстоянiя H надо выбрать такую величину, чтобъ выраженiе $\frac{N}{H}$ было простымъ.

51. На прямоугольникъ дѣйствуетъ сжимающее усилiе N, точка приложенiя котораго лежитъ на оси симметрiи. Пусть стороны прямоугольника $= b$ и $= h$ и точка приложенiя силы лежитъ на оси симметрiи, параллельной сторонѣ h; нейтральная ось будетъ параллельна сторонѣ b. Если точка приложенiя K отстоитъ отъ стороны LL на величину ξ, фиг. 74, то нейтральная ось пройдетъ на разстоянiи 3ξ отъ этой стороны, потому что прямая, проходящая черезъ K параллельно оси *nn*, должна пройти черезъ центръ тяжести S



Фиг. 74.

треугольника MTZ, такъ какъ ширина полосокъ (bdx), параллельныхъ оси nn, одинакова по всему сѣченію. Умноживъ величину площади $\left(\frac{3\xi\sigma_1}{2}\right)$ этого треугольника на ширину полоски b, получимъ величину суммы всѣхъ силъ σdF, дѣйствующихъ на сжатую часть сѣченія.

Но эта сумма должна равняться N, поэтому: $\frac{3\xi\sigma_1 b}{2} = N$, откуда получается слѣдующая формула:

$$\sigma_1 = \frac{2N}{3\xi b}, \tag{5}$$

примѣняемая при расчетѣ сводовъ, быковъ и подпорныхъ стѣнъ.

Графическимъ изслѣдованіемъ сжимающихъ усилій, дѣйствующихъ внѣ ядра сѣченія, при отсутствіи сопротивленія растяженію, занялся впервые Mohr (Zeitschr. des Hannov. Arch. u. Jng. Ver. 1883), работу котораго впослѣдствіи дополнилъ Hüppner (Civil-Jngenieur. 1885). Укажемъ также на аналитическія изслѣдованія Keck'а и Barkhausen'а (Zeitschr. d. Hannov. Arch. u. Jng. Vereins 1882 и 1883) для сѣченій: круга, круговаго кольца и прямоугольника.

---

§ 13.

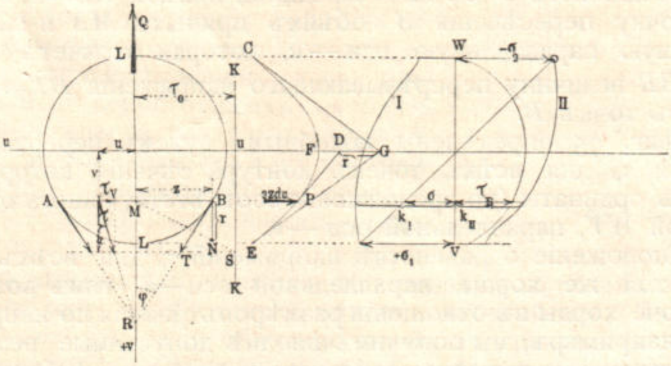
Перерѣзывающія и главныя напряженія.

52. Перерѣзывающія напряженія. Опредѣленіемъ перерѣзывающихъ напряженій τ, вызываемыхъ перерѣзывающею силою Q (см. № 36), мы займемся въ настоящемъ сочиненіи только вкратцѣ и только для одного опредѣленнаго случая нагрузки; дѣлаемъ это потому, что напряженія τ въ статикѣ сооруженій имѣютъ меньшее значеніе, чѣмъ напряженія σ, а главнымъ образомъ потому, что для этой области аналитическій выводъ законовъ напряженій имѣетъ бóльшее преимущество, и въ большинствѣ случаевъ его нельзя замѣнить геометрическими изслѣдованіями. Послѣднее замѣчаніе имѣетъ мѣсто напр., для случая силы Q, скручивающей данный стержень, когда эта сила не проходитъ черезъ центръ тяжести сѣченія.

На этомъ основаніи ограничимся изученіемъ перерѣзывающихъ напряженій въ призматическомъ стержнѣ, находящемся подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, которыя лежатъ въ плоскости содержащей ось стержня и дѣлящей стержень на двѣ симметричныхъ половины. Слѣдъ плоскости дѣйствія силъ будетъ тогда осью симметріи стержня; эту ось выберемъ за ось — v, а прямую, перпендикулярную къ ней и проходящую черезъ центръ тяжести, выберемъ за ось—u. Фиг. 75. Перерѣзывающее напряженіе τ въ какой нибудь точкѣ (u, v) сѣченія можно разложить на составляющія $\tau_v \perp v$ и $\tau_u \perp u$.

Если *предположимъ*, что τ_u для всѣхъ точекъ хорды AB, параллельной оси—u, одинаковы и что перерѣзывающія напряженія для всѣхъ точекъ поверхности стержня равны нулю, то величины τ_u и τ_v подчинены слѣдующимъ законамъ:

$$\tau_u = \frac{QS}{2zJ};\ \tau_v = \tau_u\, tg\varphi\, \frac{u}{z}, \tag{1}$$



Фиг. 75.

гдѣ $2z$—длина хорды AB,

S—статическій моментъ части площади поперечнаго сѣченія, ограниченнаго хордой AB (напр. части ALB, относительно оси—u),

J—моментъ инерціи всего поперечнаго сѣченія относительно оси—u и

φ—уголъ, образуемый касательной въ точкѣ B съ осью—v.

Изъ втораго уравненія (1) слѣдуетъ, что напряженія τ для всѣхъ точекъ хорды AB проходятъ черезъ точку R, лежащую на оси—v, въ которой пересѣкаются касательныя къ сѣченію въ точкахъ A и B.

Разобьемъ все сѣченіе на безконечно узкія полоски, перпендикулярныя къ оси v, величины ихъ площадей $dF = 2zdv$ примемъ за силы, дѣйствующія параллельно оси—u, и построимъ веревочный многоугольникъ CFE при произвольномъ полюсномъ разстояніи H. Для опредѣленія статическаго момента S проводимъ къ веревочному многоугольнику, въ точкѣ пересѣченія его съ хордой AB, касательную PD, которая вмѣстѣ съ одной изъ крайнихъ касательныхъ отсѣкаетъ на оси—u отрѣзокъ $\overline{DG} = r$. Тогда получимъ $S = Hr$, а по № 21 $J = 2H\mathfrak{F}$, гдѣ $\mathfrak{F}$—представляетъ величину площади, ограниченной веревочнымъ многоугольникомъ CFE и внѣшними касательными EG и CG. Обозначивъ

$$\tau_0 = \frac{Q}{4\mathfrak{F}}$$

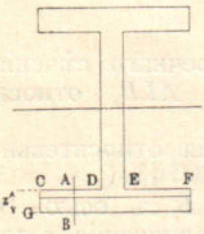
получимъ:

$$\tau_u = \tau_0 \frac{r}{z},$$

значеніе, которое легко построить, если величина τ_0 будетъ дана. Зная τ_u, можно опредѣлить и τ, такъ какъ направленіе этого напряженія дано. Для каждой хорды достаточно будетъ опредѣлить наибольшее значеніе τ, а именно появляющееся въ A и B. Для этой цѣли проводятъ прямую KK, параллельную оси—v, на разстояніи τ_0, въ точкѣ B хорды AB возставляютъ перпендикуляръ $\overline{BN} = r$, соединяютъ N съ M—серединой прямой AB—и, наконецъ, черезъ точку пересѣченія S обѣихъ прямыхъ MN и KK проводятъ прямую параллельную оси—u, которая отсѣчетъ на касательной BR величину перерѣзывающаго напряженія $\overline{BT} = \tau_B$, вызываемаго въ точкѣ B.

На фиг. 75 опредѣлены подобнымъ путемъ перерѣзывающія напряженія τ_B для всѣхъ точекъ контура сѣченія, которыя отложены какъ ординаты (по продолженію соотвѣтствующихъ хордъ AB) отъ прямой WV, параллельной оси—v.

Предположеніе о равенствѣ напряженій τ_u для всѣхъ точекъ одной и той же хорды, параллельной оси—u, тѣмъ возможнѣе, чѣмъ короче хорды въ отношеніи размѣровъ сѣченія по направленію Q. Такъ, напримѣръ, мы получимъ вполнѣ допустимые результаты, если опредѣлимъ перерѣзывающія напряженія τ въ *ребрѣ* двутавроваго сѣченія, фиг. 76, но распространить это допущеніе на *полки* нельзя. Такъ какъ для всѣхъ точекъ контура сѣченія, по извѣстному закону ученія о прочности, перерѣзывающія напряженія направлены по касательнымъ къ контуру, то для всѣхъ точекъ прямыхъ CD и EF, фиг. 76, напряженіе перпендикулярное къ оси—u, будетъ $\tau_u = 0$, а отсюда заключаемъ о невозможности появленія во всѣхъ точкахъ хорды, параллельной оси—u и безконечно близкой къ прямой CF, перерѣзывающаго напряженія τ_u, получаемаго изъ перваго уравненія (1). Это заключеніе имѣетъ значеніе для всѣхъ сѣченій съ боковыми придатками, ширина которыхъ по направленію оси v незначительна.



Фиг. 76.

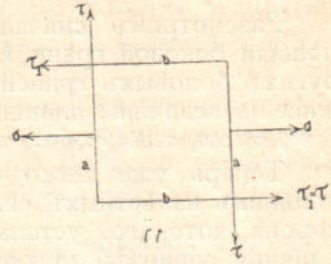
На этомъ основаніи при опредѣленіи напряженій τ въ полкахъ двутавроваго сѣченія (и въ другихъ подобныхъ случаяхъ) принимаютъ, что напряженія τ_v для всѣхъ точекъ хорды AB, перпендикулярной къ оси—u, постоянны, что приводитъ къ формулѣ

$$\tau_v = \frac{QS'}{z'J'}, \tag{2}$$

гдѣ S'—статическій моментъ относительно оси—u одной изъ двухъ частей сѣченія, ограниченныхъ хордой AB, а z'—длина хорды AB.

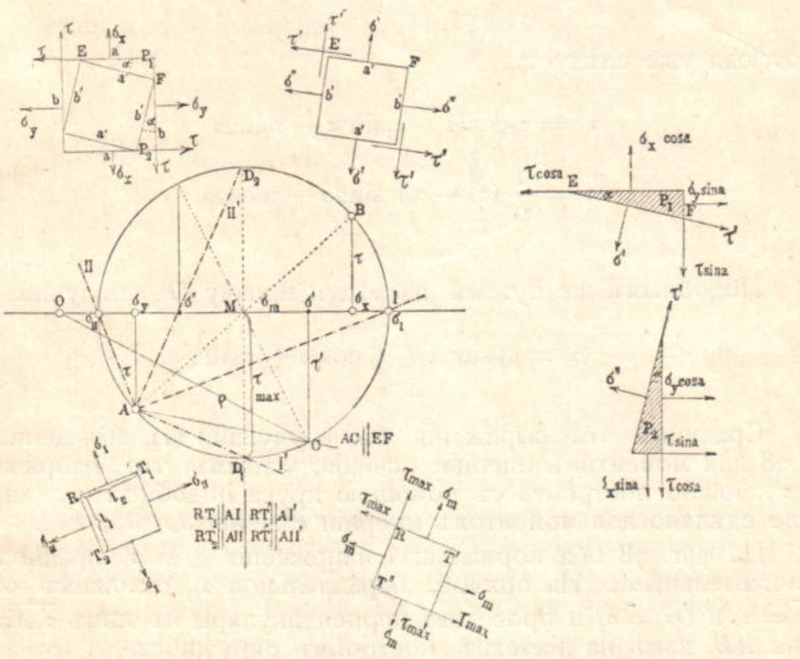
Вообще же при изслѣдованіи двутавровыхъ сѣченій (и имъ подобныхъ) достаточно будетъ опредѣлить напряженія τ только въ *ребрѣ*, поэтому дальнѣйшія изслѣдованія этого вопроса (опредѣленіе напряженій τ_u въ полкахъ и т. д.) могутъ быть пропущены.

53. Главныя напряженія. Выдѣлимъ изъ стержня весьма малый параллелопипедъ, стороны котораго обозначимъ буквами a, b, c, фиг. 77. Пусть одна боковая грань ac лежитъ въ плоскости сѣченія, перпендикулярнаго къ оси стержня, и черезъ которую проходятъ оси u, v (фиг. 75 и 77). Пусть сторона a будетъ параллельна перерѣзывающему напряженію τ, а, слѣдовательно, сторона b будетъ параллельна нормальному напряженію σ. Если напряженія постоянно мѣняются съ перемѣной положенія напряженной площади, то напряженія въ двухъ противолежащихъ другъ другу боковыхъ граняхъ отличаются между собой на величину безконечно малую, которой въ слѣдующемъ изслѣдованіи можно пренебречь. При непостоянныхъ напряженіяхъ надо сперва раздѣлить стержень на части, внутри которыхъ σ и τ постоянны, и тогда разсматриваемый параллелопипедъ долженъ лежать вполнѣ внутри одной изъ этихъ частей.



фиг. 77.

Перерѣзывающія силы τac, дѣйствующія въ обѣихъ граняхъ ac, образуютъ пару съ плечомъ b, моментъ которой τacb. Для равновѣсія параллелопипеда необходимо, чтобъ въ граняхъ bc вызывались перерѣзывающія силы $\tau_1 bc$, которыя (образуя пару съ плечомъ a) уничтожили бы моментъ τacb. Для этого нужно, чтобъ $\tau_1 abc = \tau acb$, или $\tau_1 = \tau$, т. е. чтобъ оба момента имѣли разныя направленія вращенія.



Фиг. 78.

Теперь надо будетъ изслѣдовать, какъ велики будутъ напряженія въ боковыхъ граняхъ параллелопипеда $(a' b' c')$, который такъ вписанъ въ параллелопипедъ (a, b, c), что стороны a' и b' образуютъ съ a и b уголъ α, а сторона $c' \parallel c$; рѣшимъ эту задачу въ болѣе общей формѣ, фиг. 78. Обозначимъ напряженія для параллелопипеда

(abc) буквами σ_x σ_y τ, а для параллелопипеда $(a' b' c')$ буквами $\sigma' \sigma'' \tau'$; послѣднія получаются изъ напряженій σ_x, σ_y, τ, которыя мы считаемъ извѣстными, изъ условій равновѣсія силъ, дѣйствующихъ на трехгранныя призмы (P_1) и (P_2).

Разсмотримъ сначала призму (P_1); положимъ, что величина площади боковой грани EF, фиг. 78, равна 1; а такъ какъ величины другихъ боковыхъ граней $= 1 \sin\alpha$ и $= 1 \cos\alpha$, то, умножая напряженія на величины площадей, получимъ нагрузки этихъ площадей, σ', τ', $\sigma_x\cos\alpha$, $\tau\cos\alpha$, $\sigma_y\sin\alpha$, $\tau\sin\alpha$.

Теперь уже легко будетъ опредѣлить σ' и τ', строя многоугольникъ извѣстныхъ силъ $\sigma_x\cos\alpha$, $\tau\cos\alpha$, $\sigma_y\sin\alpha$, $\tau\sin\alpha$, замыкающая сторона котораго, устанавливающая равновѣсіе этихъ силъ, дастъ величину равнодѣйствующей ρ нагрузокъ σ' и τ', дѣйствующихъ на площадь EF. Разлагая ρ, получимъ σ' и τ'. Но мы предпочтемъ дать для σ' и τ' аналитическія выраже́нія, чтобы имѣть возможность указать на замѣчательное подобіе данной задачи съ прежде рѣшенной. Разлагая всѣ силы по направленіямъ σ' и τ' и полагая суммы составляющихъ, дѣйствующихъ по одинаковымъ направленіямъ, равными нулю, получимъ:

$$\sigma' - (\sigma_x\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\cos\alpha - (\sigma_y\sin\alpha - \tau\cos\alpha)\sin\alpha = 0$$

$$\tau' - (\sigma_x\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\sin\alpha - (\sigma_y\sin\alpha - \tau\cos\alpha)\cos\alpha = 0,$$

а отсюда уже слѣдуетъ:

$$\sigma' = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\sin^2\alpha - \tau\sin2\alpha$$

$$\tau' = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin2\alpha + \tau\cos2\alpha.$$

Подобнымъ же путемъ, изслѣдуя призму (P_2) получимъ:

$$\sigma'' = \sigma_x\sin^2\alpha + \sigma_y\cos^2\alpha + \tau\sin2\alpha.$$

Сравнивъ эти выраженія съ формулами (1), выведенными въ № 28 для моментовъ инерціи сѣченія, узнаемъ, что напряженія σ' σ'' τ', можно построить съ помощью круга подобно тому, какъ это было сдѣлано для моментовъ инерціи сѣченія $J_{x'}$, $J_{y'}$, $Z_{x'y'}$.

На фиг. 78 оба нормальныя напряженія σ_x и σ_y предположены положительными. На прямой, параллельной σ_y, отложимъ отрѣзки $\overline{O\sigma_x} = \sigma_x$ и $\overline{O\sigma_y} = \sigma_y$ и проведемъ перпендикуляры къ нимъ $\overline{\sigma_yA} = \overline{\sigma_xB} = \tau$; на AB, какъ на діаметрѣ, построимъ окружность, и изъ точки A проведемъ прямую, параллельную прямой EF, которая пересѣчетъ окружность въ точкѣ C. Ордината этой точки по отношенію къ оси $\overline{O\sigma_x}$ и началу O представитъ величину напряженія τ', а абсцисса ея—напряженіе σ'. Когда точка C описываетъ всю окружность, то координаты ея проходятъ черезъ всѣ значенія, которыя могутъ принять нормальныя и перерѣзывающія напряженія въ разсматриваемомъ мѣстѣ стержня. Прямая $\overline{OC}$ представляетъ всегда по величинѣ напряженіе ρ, которое появляется въ грани, имѣющей положеніе AC. Прямыя, проведенныя изъ A до σ_I и σ_{II}—точекъ пересѣченія окружности съ осью σ, обозначимъ черезъ I и II; эти прямыя укажутъ на положеніе тѣхъ граней (RT_1 и RT_2), на которыя дѣйствуютъ наибольшія напряженія ρ (эти напряженія изобразятся отрѣзками $\overline{O\sigma_1} = \sigma_1 = \rho_{max}$ и $O\sigma_{II} = \sigma_{II} = \rho_{min}$). Въ граняхъ I и II перерѣзывающихъ усилій не существуетъ.

Перпендикуляръ, возставленный къ оси σ въ центрѣ круга M, пересѣкаетъ окружность въ точкахъ D_1 и D_2, которыми опредѣляются направленія I' и II' граней (RT' и RT'') съ наибольшими перерѣзывающими напряженіями (на чертежѣ отрѣзокъ $\overline{MD_1} = \tau_{max}$). Итакъ найдемъ $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$, а для нормальныхъ напряженій въ граняхъ I' и II' получимъ равныя значенія $\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) =$
$= \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})$.

Обыкновенно бываетъ достаточнымъ задать главныя напряженія σ_I и σ_{II}. На фиг. 78 имѣемъ:

$$\text{отрѣзокъ } \overline{\sigma_m \sigma_I} = \text{отрѣзку } \overline{\sigma_m A} = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2}$$

$$\text{а отсюда получаемъ: } \sigma_I = \sigma_m + \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2};$$

слѣдовательно:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_I &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \text{ и подобно этому} \\ \sigma_{II} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}. \end{aligned} \right.$$

Разсмотримъ теперь безконечно малый параллелопипедъ, боковыя грани котораго находятся подъ дѣйствіемъ главныхъ напряженій σ_I и σ_{II}; обозначимъ длину сторонъ, параллельныхъ этимъ напряженіямъ, буквами l_I и l_{II}. Отъ дѣйствія σ_I величина l_I удлинится на $\Delta' l_I = \frac{\sigma_I}{E} l_I$ ($E =$ коэффиціентъ упругости), а отъ дѣйствія σ_{II} — укоротится на $\Delta'' l_I = \frac{\sigma_{II} l_I}{mE}$. Общее измѣненіе длины равно:

$$\Delta l_I = \frac{l_I}{E}\left(\sigma_I - \frac{1}{m}\sigma_{II}\right),$$

точно также получимъ:

$$\Delta l_{II} = \frac{l_{II}}{E}(\sigma_{II} - \frac{1}{m}\sigma_I).$$

То напряженіе K_I, дѣйствующее по направленію l_I, которое можетъ произвести такое же измѣненіе длины Δl_I, какое производятъ оба напряженія σ_I и σ_{II} вмѣстѣ, будетъ равняться:

$$(4) \qquad k_I = \sigma_I - \frac{1}{m}\sigma_{II} = \frac{m-1}{2m}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2};$$

это напряженіе называется (по Винклеру) *воображаемымъ главнымъ напряженіемъ* или напряженіемъ въ направленіи l_I; точно также другое напряженіе:

$$(5) \qquad k_{II} = \sigma_{II} - \frac{1}{m}\sigma_I = \frac{m-1}{2m}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{m+1}{2m}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

называется напряженіемъ въ направленіи l_{II}. Можно считать стержень прочнымъ, если величины k_I и k_{II} не превосходятъ извѣстныхъ значеній, найденныхъ опытомъ; но при разсмотрѣніи этихъ предѣльныхъ значеній $\left(k_I = E\frac{\Delta l_I}{l_I} \text{ и } k_{II} = E\frac{\Delta l_{II}}{l_{II}}\right)$ надо обращать вниманіе на то, что совсѣмъ не безразлично отъ какихъ причинъ произошли относительныя удлиненія $\frac{\Delta l_I}{l_I}$ и $\frac{\Delta l_{II}}{l_{II}}$. Обыкновенное примѣненіе тѣхъ численныхъ значеній k, которыя выводятся изъ опытовъ надъ чистымъ растяженіемъ или сжатіемъ, можетъ повести при существованіи перерѣзывающихъ напряженій къ результатамъ, несогласнымъ съ опытомъ; допустить, впрочемъ, это примѣненіе можно въ томъ случаѣ, когда напряженія τ имѣютъ второстепенное значеніе, какъ это имѣетъ мѣсто при изгибѣ относительно тонкихъ и длинныхъ стержней.

По молекулярной теоріи коэффиціентъ $\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$, въ дѣйствительности же для различнаго рода тѣла этотъ коэффиціентъ не одинаковъ. Для желѣза и стали, напримѣръ, m колеблется между 3 и 4. Если мы примемъ первую величину и вернемся къ случаю $\sigma = 0$, фиг. 77, то изъ ур. (4) и (5) получимъ:

$$(6) \qquad \begin{cases} k_I = \frac{1}{3}\sigma + \frac{2}{3}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \\ k_{II} = \frac{1}{3}\sigma - \frac{2}{3}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{cases}$$

Теперь уже легко построить напряженія k_I и k_{II}; для этого сначала строимъ прямую измѣненія напряженій σ по способамъ, выведеннымъ въ §§ 9 — 11, см. фиг. 47 на стр. 56. Выраженіе

$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ представляетъ собой гипотенузу прямоугольнаго треугольника съ катетами σ и 2τ.

На фиг. 75 (нейтральная ось проходитъ черезъ центръ тяжести) ординаты кривыхъ I и II, параллельныя оси u и отложенныя отъ прямой VW даютъ значенія k_I и k_{II} для соотвѣтствующихъ точекъ контура сѣченія. Перерѣзывающее напряженіе τ_0 взято для этого случая относительно большимъ, поэтому наибольшее напряженіе k будетъ соотвѣтствовать не тѣмъ точкамъ сѣченія L, для которыхъ σ наибольшее. Въ большинствѣ случаевъ $k_{max} = \sigma_{max}$ или немного больше σ_{max}, такъ что при изслѣдованіи прочности стержня можно пренебречь вліяніемъ перерѣзывающихъ напряженій τ.

183

ЦѢНА ПОЛНАГО ИЗДАНІЯ

(2 тома—10 выпусковъ объемъ около 65 печатныхъ листовъ съ 1000 чертежами въ текстѣ и 15 литографированными таблицами)

по подпискѣ въ книжныхъ магазинахъ — **12** рублей.

Для гг. студентовъ техническихъ заведеній по подпискѣ у издателя—(С.-Петербургъ, Фонтанка 24, кв. 9)— **8** рублей.

При полученіи перваго выпуска вносится **3** руб., при послѣдующихъ по **1** руб. **50** коп. до полной уплаты. (Для студентовъ **3** руб. при полученіи перваго выпуска и по **1** руб. при слѣдующихъ).

За пересылку по вѣсу и разстоянію налагается платежъ.

Отдѣльные выпуски продаваться не будутъ.

ИЗДАНІЕ БУДЕТЪ ОКОНЧЕНО ВЪ ТЕЧЕНІИ 1899 ГОДА.

НАПЕЧАТАНЫ СЛѢДУЮЩІЕ ВЫПУСКИ: I и V (томъ I).

Дозволено цензурою С.-Петербургъ, 21 Декабря 1898 г.

Типо-литографія и переплетная Ю. А. Мансфельдъ. М. Морская, № 9.